Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

6 юни 2009 г.

ТЕМА за 9-10 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

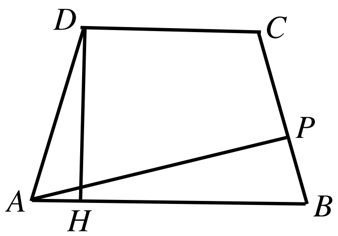
ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Сборът от корените на уравнението $\sqrt{\frac{1}{9}-2x+9x^2}=2-|x|$ е равен на:

A) 1 **B)** $\frac{7}{3}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** 0 **E)** -1

2. Ако $f(x)=\frac{2x-3}{x-2}$, намерете броя на реалните корени на уравнението $f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)=x$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** безброй много



3. Нека $ABCD$ е равнобедрен трапец, в който височината $DH\,(H\in AB)$ е равна на голямата основа AB. Точката P лежи върху бедрото BC, като $AP\perp BC$ и $BP:PC=1:3$. Отношението $AB:CD$ е равно на:

A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{3}{2}$ **C)** $\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$ **D)** $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ **E)** 3

4. Да се намери числената стойност на многочлена $P(x)=2x^5-2x^4-x^3-4x^2+4x+2$ при $x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B)** -1 **C)** 0 **D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **E)** $\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$

5. Във върховете на n-ъгълник са написани n различни числа. Ако всяко число е равно на произведението на двете му съседни, то n е равно на:

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

6. Нека $a>0$ е цяло число и $b=a+[\sqrt{a}]$, където с $[m]$ е означена цялата част на m. С числото b постъпваме по същия начин, т.е. нека $c=b+[\sqrt{b}]$. По-нататък нека $d=c+[\sqrt{c}]$ и продължаваме, докато се получи точен квадрат. Например, ако $a=17$, то последователните стъпки са 21 (17 + 4) и 25 (21 + 4), а ако $a=19$, то последователните стъпки са 23 (19 + 4), 27 (23 + 4), 32 (27 + 5), 37 (32 + 5), 43 (37 + 6) и 49 (43 + 6). Ако $a=2009$, кой е точният квадрат, който се достига по описания начин?

7. Дължините на страните и на височините на равнобедрен триъгълник са естествени числа. Каква е най-малката възможна стойност на лицето на триъгълника?