

Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

6 юни 2009 г.

ТЕМА за 11-12 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

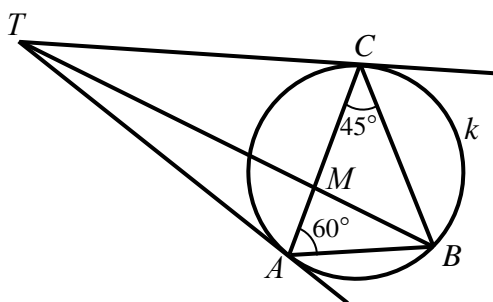
ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Нека $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = p$ и $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = q$, където p и q са различни ненулеви реални числа. Стойността на $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ е:

- A) $\frac{pq}{q-p}$ B) $\frac{pq}{p-q}$ C) $\frac{p-q}{pq}$ D) $\frac{q-p}{pq}$ E) $\frac{p}{q-p}$

2. На чертежа $\triangle ABC$ е вписан в окръжността k и допирателните към k в точките A и C се пресичат в точка T . Нека BT пресича AC в точка M . Ако $\angle BAC = 60^\circ$ и $\angle ACB = 45^\circ$, отношението $\frac{AM}{MC}$ е равно на:

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$



3. Дадена е редицата $a_n = n \left(\frac{n+1}{6} \right)^2$, $n = 1, 2, \dots, 100$. Колко от членовете на тази редица са цели числа?

- A) 8 B) 16 C) 24 D) 32 E) друг отговор

4. За всяко реално число z означаваме с $[z]$ най-голямото цяло число, което не надхвърля z .

Броят на решенията на системата $\begin{cases} x + [y] = \sqrt{2} \\ y + [x] = \sqrt{5} \end{cases}$ е:

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) повече от 3

5. Намерете броя на реалните корени на уравнението $1 - \frac{x^2}{2} = \cos x$.

- A) 0 B) 1 C) 2 D) безброй много E) четен брой

6. Дадено е уравнението $\cos(8m-3)x = \cos(14m+5)x$, където m е параметър. Намерете положителните стойности на m , при които неотрицателните решения на уравнението, взети в растящ ред, образуват аритметична прогресия.

7. Нека N е най-малкото 2009-цифрено естествено число, което е кратно на 2009. Колко измежду цифрите на N са нули?