Национален кръг на "Европейско Кенгуру"

6 юни 2009 г.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧА 7

3-4 клас

7. Нека трите чудовища, които са загубили общо четири пъти по-малко глави от останалите седем, са загубили общо x глави. Тогава броят на главите, които са загубили останалите седем чудовища, е $4x$ и общият брой на отсечените от Крали Марко глави е $5x$. (**2 т.**)

Тъй като десетте чудовища имат 40 глави и Крали Марко не е обезглавил всички, то броят на отсечените от него глави е 35, 30, 25, 20, 15, 10 или 5. (**1 т.**)

Трите чудовища, за които стана дума по-горе, са загубили най-малко 6 глави, т.е. $x \geq 6$ и следователно $5x \geq 30$. Следователно броят на отсечените глави е 35 или 30. (**1 т.**)

Нека отсечените глави са общо 35. Тогава $x = 7$, което се реализира единствено когато две от чудовищата (измежду трите, за които стана дума по-горе) са загубили по 2 глави, а третото – 3 глави. Следователно чудовищата, загубили 2 глави, са най-малко 2. Тези, които са загубили 3 глави, са най-малко 3, защото ако допуснем, че са най-много 2, то общият брой загубени глави е най-много $2.2 + 2.3 + 6.4 = 34$, което е по-малко от 35. Заключаваме, че напълно обезглавените чудовища са най-много 5 и отсечените от Крали Марко глави са най-много $2.2 + 3.3 + 5.4 = 33$. Отново стигаме до невъзможност. Следователно Крали Марко е отсякъл точно 30 глави. (**3 т.**)

Ще докажем, че случаят на 30 отсечени глави се реализира. Наистина, сега трите чудовища (за които стана дума по-горе) са загубили общо $30:5 = 6$ глави, което е възможно само ако всяко от тях е загубило по 2 глави. Следователно броят на чудовищата, загубили 2 глави, е най-малко 3, а броят на чудовищата, загубили 3, глави е най-малко 4 (съгласно условието на задачата чудовищата, останали с една глава, били повече от тези, които останали с две глави). В таблицата по-долу са показани всички възможности.

чудовища, загубили 2 глави	чудовища, загубили 3 глави	чудовища, загубили 4 глави	общ брой загубени глави
3	4	3	30
3	5	2	29
3	6	1	28
4	5	1	27

Само първата възможност удовлетворява условието. Следователно Крали Марко е отсякъл общо 30 глави и е обезглавил напълно 3 чудовища. (**3 т.**)

5-6 клас

7. Отг. 20. Произведенията $M \cdot A \cdot T \cdot E$, $M \cdot A \cdot T \cdot И$ и $K \cdot A$ имат общ множител A, което означава, че A е едноцифрен делител на числото 2009. Оттук следва, че $A = 1$ или $A = 7$. Ако $A = 1$, то лявата страна на ребуса ще е по-малка от числото $2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 1008$, което пък е по-малко от 2009 и ребусът няма да има решение. Остава $A = 7$. Да запишем ребуса във вида $M \cdot A \cdot T \cdot E + M \cdot A \cdot T \cdot И = K \cdot A + 2009$ и да проверим различните стойности на K. При $K = 1$ ребусът приема вида $M \cdot A \cdot T \cdot (E + И) = 7 \cdot 288$, откъдето $M \cdot T \cdot (E + И) = 288$. Тъй като $288 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, намираме, че $E + И$ е делител на 288, по-малък от 18 (*Е* и *И* са различни цифри и следователно $E+И \le 9+8=17$). Ако $E+И=16$, то трябва $M \cdot T=18$, но това е невъзможно, защото тогава цифрата 9 трябва да се повтаря. Ако $E+И=12$, то трябва $M \cdot T=24$. Тогава получаваме $E+И=3+9$ и $M \cdot T=6 \cdot 4$, откъдето имаме 4 решения на ребуса (защото буквите *M* и *T*, както *E* и *И*, могат да разменят стойностите си). Следващите възможности, всяка от които дава още по четири нови решения, са: $E+И=3+6$ и $M \cdot T=8 \cdot 4$, $E+И=2+6$ и $M \cdot T=9 \cdot 4$, $E+И=3+5$ и $M \cdot T=9 \cdot 4$, $E+И=2+4$ и $M \cdot T=8 \cdot 6$. Случаят $E+И=3+1$ и $M \cdot T=9 \cdot 8$ отпада, защото при него единицата се повтаря. Окончателно получаваме, че при $K=1$ даденият ребус има 20 решения:

A	*K*	*E*	*И*	*M*	*T*
7	1	3	9	4	6
7	1	9	3	4	6
7	1	3	9	6	4
7	1	9	3	6	4
7	1	3	6	4	8
7	1	6	3	4	8
7	1	3	6	8	4
7	1	6	3	8	4
7	1	2	6	4	9
7	1	6	2	4	9
7	1	2	6	9	4
7	1	6	2	9	4
7	1	3	5	4	9
7	1	5	3	4	9
7	1	3	5	9	4
7	1	5	3	9	4
7	1	2	4	6	8
7	1	4	2	6	8
7	1	2	4	8	6
7	1	4	2	8	6

При $K=2$ имаме $M \cdot T \cdot (E+И)=289=17 \cdot 17$ и ребусът няма решение. Аналогично не съществуват решения при $K=3, 4, 5, 6, 7, 8$ и 9, защото съответните равенства са:

$$M \cdot T \cdot (E+И)=290=2 \cdot 5 \cdot 29, \qquad M \cdot T \cdot (E+И)=291=3 \cdot 97,$$

$$M \cdot T \cdot (E+И)=292=2 \cdot 2 \cdot 73, \qquad M \cdot T \cdot (E+И)=293 \text{ (просто)},$$

$$M \cdot T \cdot (E+И)=294=2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \text{ (седмицата е използвана за } A\text{)},$$

$$M \cdot T \cdot (E+И)=295=5 \cdot 59, \qquad M \cdot T \cdot (E+И)=296=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 37.$$

<u>7-8 клас</u>

7. а а) Произведението на числата във всяка четворка е квадрат на произведението на числата в предната четворка. Но произведението 48.64.256.576 не е точен квадрат, защото $64=8^2$, $256=16^2$ и $576=24^2$, а 48 не е точен квадрат. Отговорът е отрицателен.

б**)** Възможно е да се тръгне от четворката (3,2,1,5) и да се направят четири стъпки. Решението може да се открие с разсъждения „отзад напред” или чрез разлагане на прости множители.

в) Очевидно (1,1,1,1) е решение. Ще докажем, че то е единственото. Други решения в цели числа няма, защото на всяка стъпка числата се увеличават. Ще докажем, че в общия случай $abcd=1$. Ако $abcd=x$, то произведението на числата от втората четворка е x^2, от третата е x^4, от четвъртата е x^8 и т. н. Ясно е, че при $x\neq 1$ в редицата от произведения няма да има две еднакви числа и следователно всички получени четворки ще бъдат различни, откъдето заключаваме, че $x=1$. Да разгледаме втората четворка (ab,bc,cd,da). Тъй като $abcd=1$, то непосредствено се вижда, че четвъртата четворка е $\left(b^2c^2,c^2d^2,d^2a^2,a^2b^2\right)$. По този начин четвъртата четворка се получава от втората чрез повдигане на втора степен и разместване. Аналогично от четвъртата четворка се получава шестата, от шестата – осмата и т.н. Ако не всички числа във втората четворка са равни на 1, то най-голямото от тях е по-голямо от 1. Това число ще се увеличава във всяка следваща четворка и никога не може да стане 1. Заключаваме, че $ab=bc=cd=da=1$. Следователно всички четворки след втората са (1,1,1,1). И така, единственото решение е (1,1,1,1).

<u>9-10 клас</u>

7. Да отбележим най-напред, че дължината на основата на триъгълника не може да е нечетно число, понеже в този случай дължината на височината към основата на триъгълника няма да бъде естествено число. И така, нека бедрата на триъгълника имат дължина a, а основата има дължина $2b$, където a и b са естествени числа. От Питагоровата теорема имаме, че височината към основата е с дължина $\sqrt{a^2-b^2}$ и тогава лицето на триъгълника е равно на $b\sqrt{a^2-b^2}$. Следователно лицето е естествено число. За дължината на височината към бедрото получаваме $\dfrac{2b\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. Нека $d=\text{НОД}(a,b)$ и $a=da_1,\ b=db_1$, като a_1 и b_1 са взаимно прости. Можем да запишем дължината на височината към бедрото във вида $\dfrac{2b_1d\sqrt{a_1^2-b_1^2}}{a_1}$. Ясно е, че числото a_1 е взаимно просто както с b_1, така и с $\sqrt{a_1^2-b_1^2}$. Оттук следва, че a_1 дели $2d$. Да допуснем, че a_1 е четно. Тогава b_1 е нечетно, защото иначе a_1 и b_1 нямаше да са взаимно прости. Но тогава няма как числото $\sqrt{a_1^2-b_1^2}$ да е естествено, защото $a_1^2-b_1^2\equiv -1\pmod 4$ и не е възможно това число да е точен квадрат. Ето защо a_1 е нечетно и тогава a_1 дели d. Нека означим $d=ka_1,\ k-$естествено. Можем да запишем лицето на триъгълника във вида $k^2a_1^2b_1\sqrt{a_1^2-b_1^2}$, а височината към бедрото във вида $2kb_1\sqrt{a_1^2-b_1^2}$. Да отбележим, че необходимото и достатъчно условие тези две числа (а заедно с тях и височината към основата) да са естествени е $\sqrt{a_1^2-b_1^2}$ да е естествено, а това не зависи от k. Понеже искаме лицето да е възможно най-малко, избираме $k=1$ и сега остава да намерим най-малката възможна стойност на израза $a_1^2b_1\sqrt{a_1^2-b_1^2}$, когато той е естествено число. Ясно е, че $a_1>1$ и тъй като е нечетно, то $a_1\geq 3$. При $a_1=3$ числото $9-b_1^2$ не може да е точен квадрат. При $a_1=5$ числото $25-b_1^2$ е точен квадрат за $b_1=3$ и за $b_1=4$. И в двата случая лицето на триъгълника е 300. При $a_1=7$ директна проверка показва, че числото $a_1^2b_1\sqrt{a_1^2-b_1^2}$ не може да е цяло, а ако $a_1\geq 9$, то $a_1^2b_1\sqrt{a_1^2-b_1^2}\geq 81\cdot 1\cdot\sqrt{9^2-8^2}=81\sqrt{17}>300$. Следователно търсената минимална стойност на лицето на триъгълник е 300. Може да се провери, че тази стойност се достига за триъгълници със страни (25,25,30) и (25,25,40). За тези триъгълници са изпълнени условията на задачата.

11-12 клас

7. Най-малкото 2009-цифрено число е $1\underbrace{00\ldots0}_{2008}=10^{2008}$. Ще пресметнем остатъка при деление на 10^{2008} с 2009, като използваме, че $2009=41\cdot 49$. Имаме:

$$10^5\equiv 1\pmod{41}\Rightarrow 10^{2005}\equiv 1\pmod{41}\Rightarrow 10^{2008}\equiv 10^3\equiv 16\pmod{41}.$$

От теоремата на Ойлер ($10^{\varphi(n)}\equiv 1(\bmod n)$) имаме $10^{42}\equiv 1\pmod{49}$, защото $\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}$, т.е. $\varphi(49)=\varphi(7^2)=7^2-7=42$. От друга страна $2008\equiv 34\pmod{42}$ и следователно $10^{2008}\equiv 10^{34}\pmod{49}$. Директно пресмятаме, че $10^{34}\equiv 46\pmod{49}$ и тогава $10^{2008}\equiv 46\pmod{49}$. От сравненията $10^{2008}\equiv 16\pmod{41}$ и $10^{2008}\equiv 46\equiv -3\pmod{49}$ намираме остатъка при делението на 10^{2008} с 2009. Тъй като $10^{2008}=49t-3,\ t\in N$, то трябва $49t-3\equiv 16\pmod{41}\Rightarrow 8t\equiv 19\equiv 60\pmod{41}\Rightarrow 2t\equiv 15\equiv 56\pmod{41}\Rightarrow t\equiv 28\pmod{41}$.

Следователно $10^{2008}=49(41k+28)-3=2009k+1369$. Получихме, че $10^{2008}\equiv 1369\pmod{2009}$, откъдето следва, че най-малкото естествено число с 2009 цифри, което е кратно на 2009, е $10^{2008}-1369+2009=10^{2008}+640$. Това число има 2009 цифри, от които точно три: 1, 6 и 4, са различни от нула. Следователно нулите му са 2006.