МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика, Хисаря, 15–17 март 2013 г.
Решения на темата за 11.–12. клас

Задача 1. ***Светлини и сенки***

А) Нека топката се намира в т. A, нейната проекция върху X – в т. B, а сянката – в т. S по продължение на светлинния лъч, минаващ през A. Като вземем предвид, че $\angle ASB = \beta$, от правоъгълния триъгълник ABS намираме:

$BS = AB\cot\beta$

Понеже $x_S = OA + BS = x + BS$ и $AB = y$, получаваме:

(1) $$x_S = x + y\,\mathrm{cotg}\beta$$ **[1.0 т]**

Б) Законите за движение на топката в направление на координатните оси имат вида:

(2) $$x(t) = v_0\cos\alpha\cdot t$$ **[0.5 т]**

(3) $$y(t) = v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2}$$ **[0.5 т]**

Като заместим изразите за x и y в уравнение (1), намираме:

(4) $$x_S(t) = v_0(\cos\alpha + \sin\alpha\,\mathrm{cotg}\beta)t - \frac{g\,\mathrm{cotg}\beta\cdot t^2}{2}$$ **[1.0 т]**

В) Като сравним уравнение (4) със закона за равноускорително движение:

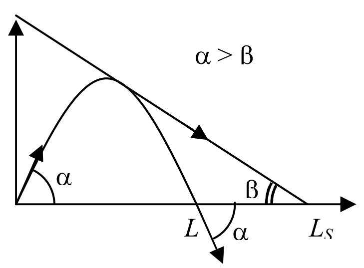
(5) $$x = v_{S0}t + \frac{a_S t^2}{2},$$ **[0.5 т]**

намираме:

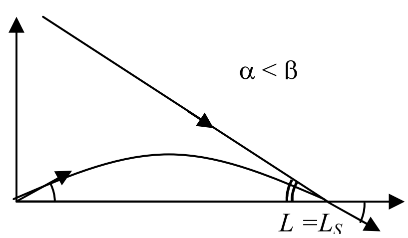
(6) $$v_{S0} = v_0(\cos\alpha + \sin\alpha\,\mathrm{cotg}\beta)$$ **[0.5 т]**

(7) $$a_S = -g\,\mathrm{cotg}\beta$$ **[0.5 т]**

Г)



[0.5 т]



[0.5 т]

Когато α > β, максималното разстояние, на което се отдалечава сянката, се определя от пресечната точка с оста X на лъча, който е допирателен към траекторията на топката. В този случай $L_S > L$. **[0.5 т]**

Когато $\alpha = \beta$, никой от лъчите не се допира до траекторията и $L_S = L$. **[0.5 т]**

Д) <u>1) $\alpha > \beta$</u>

Както се вижда от чертежа, в този случай сянката отначало се отдалечава, докато достигне максималното разстояние L_S, след което започва да се връща, докато достигне точката на падане на топката. В момента, в който сянката достига максимално разстояние, нейната скорост v_S е нула. Понеже при равнопроменливо движение:

(8) $$v_S(t) = v_{S0} + a_S t = v_0(\cos\alpha + \sin\alpha\,\mathrm{cotg}\beta) - g\,\mathrm{cotg}\beta\cdot t\,,$$ **[0.5 т]**

намираме момента t_0 на максимално отдалечаване:

(9) $$t_0 = \frac{v_0(\cos\alpha + \sin\alpha\,\mathrm{cotg}\beta)}{g\,\mathrm{cotg}\beta}$$ **[0.5 т]**

и съответно от уравнение (4) – максималното разстояние:

(10) $$L_S = x_S(t_0) = \frac{v_0^{\,2}(\cos\alpha + \sin\alpha\,\mathrm{cotg}\beta)^2}{2g\,\mathrm{cotg}\beta} = \frac{v_0^{\,2}\sin^2(\alpha+\beta)}{g\sin(2\beta)}\,.$$ **[1.0 т]**

<u>2) $\alpha < \beta$</u>

В този случай е нужно да намерим момента t_1, в който топката пада, т.е. $y = 0$. От уравнение (3) намираме:

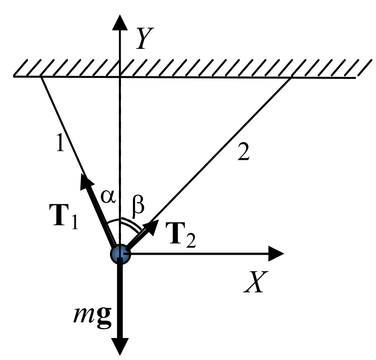
(11) $$t_1 = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}\,.$$ **[0.5 т]**

Понеже $L_S = L$, можем да заместим t_1 както в уравнение (2), така и в уравнение (4). Резултатът е един и същ:

(12) $$L_S = x_S(t_1) = x(t_1) = \frac{2v_0^{\,2}\sin\alpha\cos\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha\,\mathrm{cotg}\beta)^2}{g} = \frac{v_0^{\,2}\sin(2\alpha)}{g}$$ **[1.0 т]**

Задача 2. *Сили на опън*

А) Въвеждаме координатна система, както е показано на чертежа. За чертеж с правилно означени посоки на силите **[1.5 т]**



Б) От условието за равновесие по двете оси намираме:

по X: $T_2\sin\beta - T_1\sin\alpha = 0$; **[0.5 т]**

по Y: $T_1\cos\alpha + T_2\cos\beta - mg = 0$ **[0.5 т]**

От двете уравнения намираме:

$$T_1 = \frac{mg\sin\beta}{\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha}$$ **[0.5 т]**

$$T_2 = \frac{mg\sin\alpha}{\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha}$$ **[0.5 т]**

Като вземем предвид конкретните стойности на ъглите, пресмятаме:

$$T_1 = \frac{2mg}{\sqrt{3}+1} \approx 7{,}3\ \mathrm{N}$$ **[0.5 т]**

$$T_2 = \frac{\sqrt{2}mg}{\sqrt{3}+1} \approx 5{,}2\ \mathrm{N}$$ **[0.5 т]**

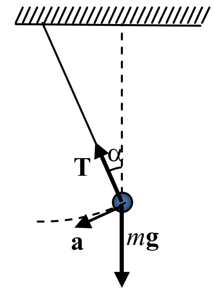
В) След като нишката 2 е прерязана, топчето започва да се движи по окръжност. Началната му скорост е нула, откъдето следва, че в този момент нормалното му ускорение също е нула. Следователно в началния момент ускорението на топчето е тангенциално – насочено перпендикулярно на нишката.

За чертеж с правилно означени посоки на силите и на ускорението **[1.0 т]**

От II принцип на Нютон: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$ получаваме две уравнения –

в направление на нишката: $mg\cos\alpha - T = 0$ **[0.5 т]**

и перпендикулярно на нишката: $ma = mg\sin\alpha$ **[0.5 т]**



от които намираме:

$a = g\sin\alpha = 5{,}0\ \mathrm{m/s^2}$ **[0.5 т]**

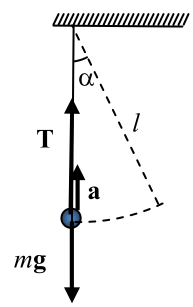
$T = mg\cos\alpha \approx 8{,}7\ \mathrm{N}$ **[0.5 т]**

Г) В момента, когато нишката достига вертикално положение, топчето има само нормално ускорение. На фигурата са показани посоките на силите, които действат на топчето в този момент.

За чертеж с правилно означени посоки на ускорението и силите **[1.0 т]**

От II принцип на Нютон получаваме по посока на нишката:

$$\frac{mv^2}{l} = T - mg\,.$$ **[0.5 т]**



От закона за запазване на механичната енергия имаме:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh = mgl(1-\cos\alpha)\,.$$ **[0.5 т]**

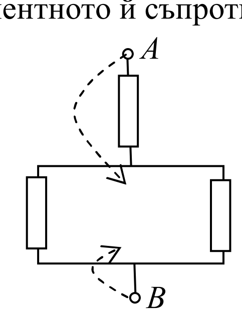
Така намираме: $2mg(1-\cos\alpha) = T - mg$

или: $T = mg(3 - 2\cos\alpha) \approx 12{,}7\ \mathrm{N}$ **[0.5 т]**

Задача 3. ***Еквивалентно съпротивление***

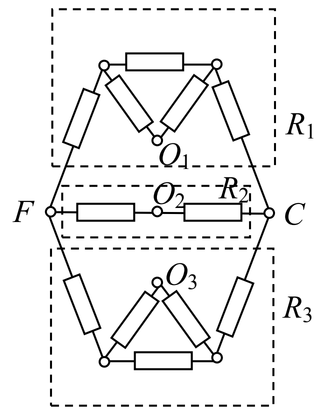
А) Ако извием краищата A и B на еквивалентната схема, както е показано с пунктирани линии, ще получим изходната схема. Еквивалентното ѝ съпротивление е:

$$R_e = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \frac{3}{2}R$$ **[1.0 т]**



[1.0 т]

Б) В показаната схема точките O_1, O_2 и O_3 имат еднакви потенциали, защото се намират върху оста на симетрия на веригата. **[1.0 т]**



[1.0 т]

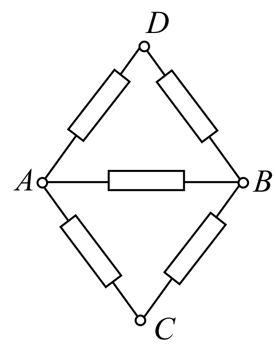
Следователно токовете и напреженията върху резисторите няма да се променят, ако трите точки бъдат свързани в една обща точка – O, както в изходната схема. Еквивалентното съпротивление на веригата се получава чрез пресмятане на еквивалентните съпротивления на трите успоредно свързани клона:

$$R_1 = R_3 = R + R + \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \frac{8}{3}R \quad \textbf{[0.5 т]}$$

$$R_2 = 2R \quad \textbf{[0.5 т]}$$

$$R_e = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = \frac{4}{5}R \quad \textbf{[1.0 т]}$$

В) Точките C и D имат еднакви потенциали, защото лежат върху равнина на симетрия, минаваща през страната AB. **[1.0 т]** Следователно през резистора CD не тече ток и той може да бъде махнат от схемата, без да промени напреженията и токовете върху останалите резистори. Схемата е еквивалентна на дадената. Както в предишната задача, пресмятаме съпротивленията на трите успоредно свързани клона:



[1.0 т]

$$R_1 = R_3 = 2R \quad \textbf{[0.5 т]}$$

$$R_2 = R \quad \textbf{[0.5 т]}$$

и тяхното еквивалентно съпротивление:

$$R_e = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = \frac{1}{2}R \quad \textbf{[1.0 т]}$$