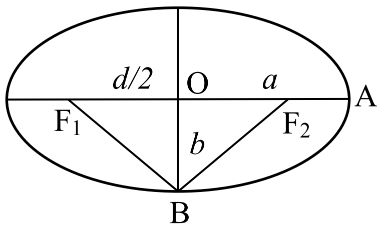
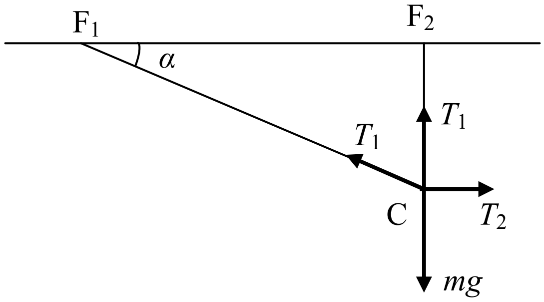
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Национално състезание по физика, Хисаря, 16 март 2013 г.
Решения на специалната тема

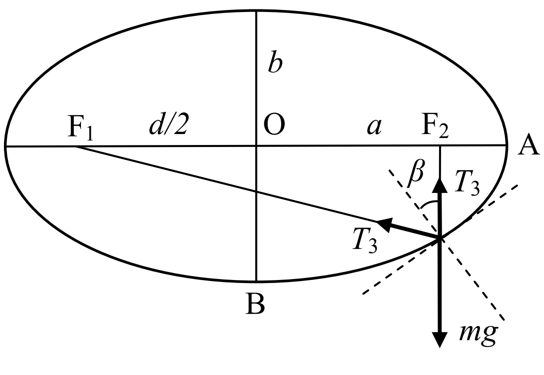
<u>Задача 1</u>. Алпийски тролей.



а) Нека a е хоризонталната полуос на елипсата, а b – вертикалната. От чертежа се вижда, че $F_2A + AF_1 = l = 2a$, следователно $a = l/2$. (1.1) **[0.5 т.]** От триъгълника OBF_2 следва, че $\left(\frac{d}{2}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$, откъдето $b = \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{2}$ (1.2). **[0.5 т.]**



б) Тъй като тялото е в покой, сумата от действащите му сили е нула. Следователно $mg = T_1(1 + \sin\alpha)$ **[0.25 т.]** и $T_2 = T_1\cos\alpha$. **[0.25 т.]** Нека бележим дължината на CF_2 с l_2. Тогава $\sin\alpha = l_2/l - l_2$ **[0.25 т.]** (1.3). От уравнението на елипсата следва $\left(\frac{d/2}{a}\right)^2 + \left(\frac{l_2}{b}\right)^2 = 1$ (1.4). **[0.25 т.]** След заместването на a и b с изразите им от (1.1) и (1.2), (1.4) се преобразува до $l_2 = \frac{l^2 - d^2}{2l}$ (1.5). Заествайки (1.5) в (1.3), $\sin\alpha = \frac{l^2 - d^2}{l^2 + d^2}$. Така $T_1 = \frac{mg}{2}\left[1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2\right]$ **[0.5 т.]**, а $T_2 = mg\frac{d}{l}$. **[0.5 т.]**



в) След отвързването на спомагателното въже, скоростта на тялото все още е нула. Следователно тялото започва да се движи с тангенциално към траекторията ускорение. Следователно сумата от проекциите на действащите сили върху нормалата е нула. Използвайки "оптичното" свойство на елипсата следва, че и двете сили на опън T_3 сключват един и същи ъгъл β с нормалата.

Следователно $2T_3\cos\beta = mg\cos\beta$, или $T_3 = mg/2$. **[1 т.]**

г) Прилагайки закона за запазване на механичната енергия за началната точка и за най-ниската точка от траекторията, получаваме $mg(b - l_2) = mv^2/2$. (1.6) **[0.5 т.]** Заместваики (1.2) и (1.5) в (1.6), $v = \sqrt{2g(b - l_2)} = \sqrt{gl}\sqrt{\sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2} + \left(\frac{d}{l}\right)^2 - 1}$. **[1.5 т.]**

д) Замествайки отношението $(d/l)^2$ със z, търсим максимум на функцията $f(z)=\sqrt{\sqrt{1-z}+z-1}$. **[0.5 т.]** Нейната първа производна се нулира за $z=3/4$. **[0.5 т.]** Следователно търсеното отношение е $d/l=\sqrt{3}/2$ **[0.5 т.]** За максималната скорост се получава $v=10$ m/s. **[0.5 т.]**

е) Нека представим потенциалната енергия на тялото около най-ниската точка от траекторията: $E_p=mgy=mg\left(-b+\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=0}x^2\right)=\ mg\left(-b+\frac{1}{2}\frac{b}{a^2}x^2\right)$. **[0.5 т.]** Тъй като кинетичната енергия е $E_k=\frac{1}{2}mv^2$, то периодът на трептене е $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{mgb/a^2}}=$ $=2\pi\sqrt{\frac{a^2}{bg}}$. Използвайки (1.1) и (1.2) $T_0=2\pi\frac{l}{\sqrt{2g}.\sqrt[4]{l^2-d^2}}=\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}\frac{1}{\sqrt[4]{1-\left(\frac{d}{l}\right)^2}}$. **[1 т.]** При условията от подточка д), $T_0=4\pi\approx 12{,}6$ s **[0.5 т.]**

<u>Задача 2</u>. Електростатичен (кондензаторен) микрофон.

а) Когато разстоянието между плочите на кондензатора се мени по закона $d(t)=d_0[1+\alpha\sin(\omega t)]$, (2.1) капацитетът на кондензатора се мени с времето така: $C(t)=\frac{\varepsilon_0 S}{d_0[1+\alpha\sin(\omega t)]}$. (2.2) От закона на Ом за цялата верига следва $E=RI(t)+\frac{q(t)}{C(t)}$.**[0.5 т.]** (2.3) Нека допуснем, че зарядът върху плочите на кондензатора зависи от времето така: $q(t)=q_0[1+\beta\sin(\omega t+\delta)]$. (2.4) Тогава токът е $I(t)=\dot{q}(t)=q_0\beta\omega\cos(\omega t+\delta)$. (2.5) Замествайки (2.2), (2.4) и (2.5) в (2.3), се получава

$$E=Rq_0\beta\omega\cos(\omega t+\delta)+\frac{q_0[1+\beta\sin(\omega t+\delta)]}{\dfrac{\varepsilon_0 S}{d_0[1+\alpha\sin(\omega t)]}}=$$

$=Rq_0\beta\omega\cos(\omega t+\delta)+\frac{q_0}{C_0}[1+\beta\sin(\omega t+\delta)][1+\alpha\sin(\omega t)]$. (2.6) След опростяване, (2.6) изглежда така: $RC_0\beta\omega\cos(\omega t+\delta)+\alpha\sin(\omega t)+\beta\sin(\omega t+\delta)=0$. **[0.5 т.]** (2.7) Последното уравнение може да се преобразува до: $\beta(RC_0\omega\cos\delta+\sin\delta)\cos(\omega t)+(-RC_0\omega\beta\sin\delta+\alpha+\beta\cos\delta)\sin(\omega t)=0$. (2.8) (2.8) е изпълнено за всеки момент от времето, само ако множителите пред тригонометричните функции, зависещи от времето, са нули. Следователно, $RC\omega\cos\delta+\sin\delta=0$, откъдето $\tan\delta=-RC_0\omega$ **[0.5 т.]** (2.9), и $-RC_0\omega\beta\sin\delta+\alpha+\beta\cos\delta=0$, откъдето $\beta=-\alpha\cos\delta=-\frac{\alpha}{\sqrt{(RC_0\omega)^2+1}}$. **[0.5 т.]** (2.10) Тогава $U_R(t)=RI(t)=Rq_0\beta\omega\cos(\omega t+\delta)=$ $=RC_0E\beta\omega\cos(\omega t+\delta)=\frac{\alpha E}{\sqrt{1+\frac{1}{(RC_0\omega)^2}}}\sin\left(\omega t+\delta-\frac{\pi}{2}\right)$. Следователно $U_{R0}=\frac{\alpha E}{\sqrt{1+\frac{1}{(RC_0\omega)^2}}}$ **[0.5 т.]**, и $\varphi=\delta-\frac{\pi}{2}$. **[0.5 т.]**

б) В областта (50 Hz ÷ 20 kHz), $(RC_0\omega)^2 >> 1$, следователно $U_R(t) \approx \alpha E \sin(\omega t + \pi) = -\alpha E \sin(\omega t)$ (2.11)**[1 т.]**

в) Нека разгледаме тънък слой въздух с площ S и дебелина dx. Резултантната сила, която му действа, е $dF(x,t) = Sdp = S\dfrac{dp}{dx}dx \quad = Skp_1 \cos(kx - \omega t + \psi)dx$. **[0.5 т.]** Ускорението му е $a(x,t) = -\omega^2 u_0 \sin(kx - \omega t)$. **[0.5 т.]** От втория принцип на динамиката $dF = dma$, или $Skp_1 dx = \rho S dx \omega^2 u_0$, откъдето $p_1 = \dfrac{\rho\omega^2 u_0}{k} = \rho\omega c u_0$. (2.12) **[1 т.]**

г) От (2.11) амплитудата на напрежението върху резистора ще бъде $U_0 = \alpha E$. Подвижната пластина на кондензатора трепти така: $x(t) = \alpha d_0 \sin(\omega t)$. Ускорението $a(t)$, с което трепти, е $a(t) = -\omega^2 \alpha d_0 \sin(\omega t)$. **[0.5 т.]** Това ускорение е предизвикано от резултантна сила $F(t) = -p_1 S \sin(\omega t)$. **[0.5 т.]** Следователно $p_1 S = m\omega^2 \alpha d_0$. Използвайки (2.12), $\alpha = \dfrac{p_1 S}{m\omega^2 d_0} = \dfrac{\rho\omega c u_0 S}{m\omega^2 d_0} = \dfrac{\sqrt{2I\rho c}C_0}{\varepsilon_0 m\omega^2}$. Следователно $U_0 = \dfrac{\sqrt{2I\rho c}C_0 E}{\varepsilon_0 m\omega^2} \approx$ **[1 т.]** 47 μV. **[1 т.]**

д) Разстоянието d_0 между плочите на кондензатора е $d_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{C_0} \approx 0{,}89$ mm. **[0.5 т.]**

е) Дебелината h на подвижната плоча на кондензатора е $h = \dfrac{m}{\rho S} =$ 0,10 mm. **[0.5 т.]**

<u>Задача 3.</u> Вълнички в басейн.

а) Наклонът на водната повърхност в произволна точка е равен на производната $\dfrac{dz}{dx} = A_1 \dfrac{2\pi}{\lambda}\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x - \dfrac{2\pi}{T}t\right)$. **[0.5 т.]** Следователно "плоската" част на вълната сключва ъгъл α с хоризонталата, равен на $\alpha \approx tg\alpha = \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2\pi A_1}{\lambda}$. **[0.5 т.]** Това е и ъгълът, който сключва падащият вертикален лъч с нормалата на "плоската" част на вълната. **[0.5 т.]** От закона на Снелиус, следва: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{n}{1} = n \approx \dfrac{\alpha}{\beta}$. **[0.5 т.]** От чертежа може да се намери, че $\dfrac{\lambda/4}{h} = \tan(\alpha - \beta) \approx \alpha - \beta = \dfrac{n-1}{n}\alpha = \dfrac{(n-1)}{n}\dfrac{2\pi A_1}{\lambda}$. **[0.5 т.]** Следователно $A_1 = \dfrac{1}{8\pi}\dfrac{n}{n-1}\dfrac{\lambda^2}{h}$ **[1 т.]**. След заместване с дадените стойности, $A_1 \approx 3{,}21\,\text{mm}$. **[0.5 т.]**

б) Нека изберем координатната система така, че в някакъв момент от време вълничката да се описва с уравнението $z(x) = A\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right)$. Първата и втората производни в точката $x = 0$ са съответно $\dfrac{dz}{dx}(0) = 0$ **[0.5 т.]** и $\dfrac{d^2z}{dx^2}(0) = -\dfrac{4\pi^2}{\lambda^2}A$. **[0.5 т.]** Съгласно дадената формула, радиусът на кривината на водната повърхност в тази точка е $R = \dfrac{\lambda^2}{4\pi^2 A}$. **[1 т.]**

в) Използвайки формулата за фокусното разстояние на пречупваща сферична повърхност (или след нейния извод) $\dfrac{n}{h} = \dfrac{n-1}{R} = \dfrac{(n-1)4\pi^2 A_2}{\lambda^2}$ **[2 т.]**, се получава $A_2 = \dfrac{1}{4\pi^2}\dfrac{n}{n-1}\dfrac{\lambda^2}{h} = \dfrac{2}{\pi}A_1$ **[1 т.]** = 2,04 mm. **[1 т.]**