МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Национално състезание по физика, Хисаря, 16 март 2013 г.
Специална тема

Задача 1. Алпийски тролей.

"Алпийският тролей" е техника в алпинизма за придвижване (бързо спускане) по въже. Алпинистът е закачен за носещото въже посредством стоманено устройство, съдържащо малки макари, наречено "десандьор". Така триенето може се сведе до минимум.

В тази задача моделът е следния. Неразтегливо въже с пренебрежима маса и дължина l е закачено в двата си края на две точки, намиращи се на една и съща височина и на разстояние d една от друга ($d < l$). Земното ускорение е g. Материална точка (тяло) с маса m се хлъзга без триене по въжето. Траекторията на движението на тялото е част от елипса.

а) Изразете двете полуоси a и b на елипсата чрез l и d. **[1 т.]**

б) Нека преди началото на движението тялото се намира в покой точно под едната точка на окачване. Този покой се осигурява от второ спомагателно хоризонтално въже (за което е вързано тялото). Намерете силата на опън T_1 на носещото въже и силата на опън T_2 на спомагателното въже. **[2 т.]**

в) Тялото се отвързва от спомагателното въже. Колко е силата на опън T_3 на носещото въже в този момент? **[1 т.]**

г) С каква скорост v тялото преминава през най-ниската точка от траекторията си? **[2 т.]**

д) Нека $l = const$, а d може да се мени. При каква стойност на отношението d / l, скоростта v ще е максимална? Изчислете максималната скорост при $l = 40\,\text{m}$? $g = 10\,\text{m/s}^2$ **[2 т.]**

е) След време тялото извършва малки трептения около най-ниската точка от траекторията си. Какъв е периодът T_0 на тези трептения? Изчислете стойността му при условията от подточка д) **[2 т.]**

Задача 2. Електростатичен (кондензаторен) микрофон.

Електростатичният (кондензаторен) микрофон е изобретен през 1916 г. в Bell Labs. И досега се използва широко заради добрите му технически характеристики: слаба честотна зависимост на чувствителността му и нисък шум. Има един недостатък – цената му е висока.

В тази задача моделът е следния. Електрична верига е съставена от последователно свързани идеален източник на напрежение с електродвижещо напрежение E = 9,00 V, резистор с електрично съпротивление R = 2,00 GΩ и плосък кондензатор с капацитет C_0 = 10,0 pF. Равновесното разстояние между плочите на кондензатора е d_0. Едната плоча на кондензатора е много лека и може да се разтрепти от падаща звукова вълна. Окачването на тази плоча е такова, че възвръщащата сила може да се пренебрегне.

а) Нека заради падащата звукова вълна разстоянието между плочите на кондензатора се мени по закона $d(t) = d_0[1 + \alpha \sin(\omega t)]$, където $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$ е кръговата честота на монохроматичния звук, а $\alpha << 1$. Оказва се, че тогава върху резистора може да се измери променливо напрежение $U_R(t) = U_{R0} \sin(\omega t + \varphi)$. Получете изрази за U_{R0} и φ. **[3 т.]**

б) Получете приближена формула за $U_R(t)$, валидна за областта (50 Hz $\div$ 20 kHz). **[1 т.]**

в) Нека падащият върху микрофона звук представлява надлъжна бягаща монохроматична вълна, описвана от уравнението $u(x,t) = u_0 \sin(kx - \omega t) = u_0 \sin\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x - \dfrac{2\pi}{T}t\right)$, където u_0 е амплитудата на трептене на частиците на въздуха, а λ и T – съответно дължината и периода на вълната. Ако предположите, че звукът предизвиква разширения и свивания на въздуха, такива, че налягането на въздуха се мени по закона $p(x,t) = p_0 + p_1 \sin(kx - \omega t + \psi)$, намерете израз за p_1. (Приложете втория принцип на динамиката за тънък слой въздух!) **[2 т.]**

г) Нека подвижната плоча на кондензатора има маса m = 0,500 g и площ S = 10,0 cm^2. Нека описваме енергията, пренесена от звука през единица площ за единица време с понятието интензитет I на звука. Той зависи от скоростта c на разпространение на звука, плътността ρ на въздуха, кръговата честота ω и ампитудата u_0 на звука така: $I = \frac{1}{2}\rho c \omega^2 u_0{}^2$. Вместо да се мери в единици W/m^2 обаче, интензитетът на звука обикновено се дава в децибели (dB), като $I[d\mathrm{B}] = 10\log_{10}\left(\frac{I[\mathrm{W/m^2}]}{I_0}\right)$, където I_0 = 1.10^{-12} W/m^2 (точно) е така наречения "праг на чуване". Нека върху микрофона пада звук с интензитет I = 70,0 dB и честота ν = 1,00 kHz. Каква амплитуда U_0 на напрежението ще се измери върху резистора? Плътността на въздуха е ρ = 1,20 kg/m^3. Скоростта на звука във въздуха е c = 340 m/s. Приемете, че налягането на въздуха между двете плочи на кондензатора не се променя. Диелектричната проницаемост на вакуума е $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F/m. **[3 т.]**

д) Изчислете разстоянието d_0 между плочите на кондензатора? **[0.5 т.]**

е) Изчислете дебелината h на подвижната плоча на кондензатора, ако е направена от сплав с плътност ρ_C = 5,00.10^3 kg/m^3 ? **[0.5 т.]**

Навсякъде в тази задача ефектите от електростатичното привличане между двете плочи на кондензатора се пренебрегват.

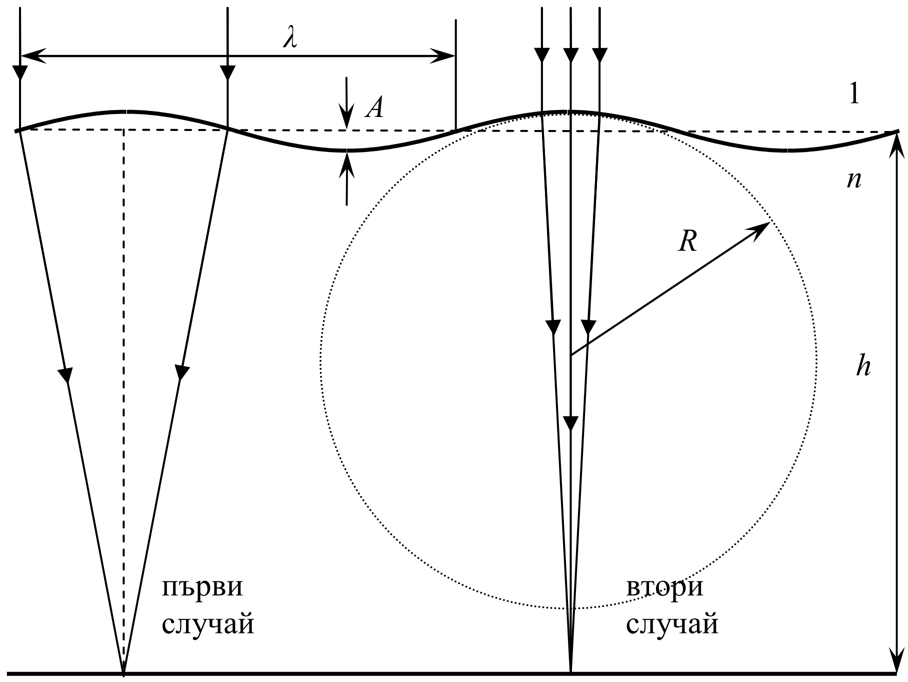
Задача 3. Вълнички в басейн.

В хубав слънчев ден може да се забележи, че по дъното на басейн се образуват красиви постоянно движещи се светли ивици (петна). Причината за тяхната поява е пречупването на светлината от нагънатата от вълнички водна повърхност. Тук ще се разгледат два частни случая. Басейнът е пълен с вода с показател на пречупване $n = 1{,}33$. Над него има въздух, чийто показател на пречупване може да се приеме за единица. Дълбочината на басейна е $h = 2{,}00\,\mathrm{m}$. Нека по повърхността на водата се разпространява една единствена вълна. Да предположим, че тя създава вертикални отклонения на водната повърхност $z(x) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right)$, където A е амплитудата на вълната, а λ и T – съответно дължината и периода на вълната, x – хоризонтална координата, z – вертикално отклонение. $\lambda = 20{,}0\,\mathrm{cm}$. Приемете, че $A << \lambda << h$.

а) Първи случай. Изчислете амплитудата A_1 на вълната, при която вертикални лъчи, падащи върху двете "плоски" наклонени страни на един връх на вълната, ще достигат дъното в точка, намираща се точно под същия този връх на вълната. **[4 т.]**

б) Нека да си представим, че повърхността около върха на вълната може да се апроксимира (приближено да се описва) с цилиндрична повърхност с радиус R. Намерете радиуса $R = f(\lambda, A)$. **[2 т.]**

в) Втори случай. Изчислете амплитудата A_2 на вълната, при която вертикални лъчи, падащи около и във върха на вълната, ще достигат дъното на басейна в точка, намираща се точно под същия този връх на вълната (т.е. върхът на вълната ще работи като цилиндрична леща с фокус, намиращ се на дъното на басейна). **[4 т.]**



Чертежът е само за илюстрация. Отношенията на дадените размери h, λ, A, R не са верни! Освен това двата случая не са възможни за една и съща амплитуда A.

Полезна математика:

1. Елипсата е такава крива, че сумата от разстоянията от произволна точка на елипсата до две точки, наречени фокуси на елипсата, е константа. В декартова координатна система с начало в центъра на елипсата и оси, ориентирани по осите на симетрия на елипсата, уравнението на елипсата е $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, *където a и b са двете полуоси на елипсата. Интересно "оптично" свойство на елипсата е, че лъч, тръгнал от единия фокус, след "отражение" от елипсата минава през другия фокус на елипсата.*

2. Равенството $A\sin x + B\cos x = 0$ *е тъждество за всяко x тогава и само тогава, когато* $A \equiv 0 \wedge B \equiv 0$.

3. Радиус ρ на кривината на крива, описвана с уравнението $y(x)$ *в точка от кривата с координати* $(x_0, y(x_0))$, *е* $\rho = \left.\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}\right|_{x=x_0}$.   *4.* $(1+x)^n \approx 1+nx$, $x \ll 1$.

5. $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

6. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$.

7. $\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right) = ae^{ax}$, $\frac{d}{dx}[\cos(ax)] = -a\sin(ax)$, $\frac{d}{dx}[\sin(ax)] = a\cos(ax)$.

8. $\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = \left[\frac{d}{dx}f(x)\right].g(x) + f(x).\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]$.   *9.* $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$, $\alpha \ll 1$.