Министерство на образованието, младежта и науката
Съюз на математиците в България

62 Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 25 февруари 2013 г.

Тема за 9. клас

Задача 1. Да се докаже, че ако за дължините на страните на $\triangle ABC$ е в сила равенството $AB+BC=2AC$, то върхът B, центърът на вписаната в триъгълника окръжност и средите на страните AB и BC лежат на една окръжност.

Задача 2. Да се намерят всички стойности на реалните параметри a и b, за които полиномът $f(x)=x^3-bx^2+(3-a^2)x+3b$ е такъв, че $f(a-1)=f(a+1)$ и при делението му на полинома $x-b$ се получава остатък $(-2a)$.

Задача 3. Нека p е просто число. Да се намерят всички цели числа x и y, за които

$$(2x+y)^3=p^2x(x+y)^2.$$

Задача 4. Нека A е множество от естествени числа със следното свойство: За всеки два елемента $m,n\in A$, $m\neq n$, е в сила неравенството

$$10|m-n|+50\geq mn.$$

Да се намери максималният възможен брой елементи на A.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа: 4 часа и 30 минути