Министерство на образованието, младежта и науката
Съюз на математиците в България

---

62 Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 25 февруари 2013 г.

Тема за 11. клас

Задача 1. Да се намерят стойностите на реалните параметри p, q и r, ако числата $p, -\dfrac{q}{2}, r$ образуват аритметична прогресия и уравнението

$$x^3 + px^2 + qx + r - 1 = 0$$

има три корена, които са естествени числа и образуват аритметична прогресия с разлика 2013.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$, вписан в окръжност k с център O. Допирателната към k в точка C пресича лъча $BA^{\rightarrow}$ в точка S. Върху лъча $CA^{\rightarrow}$ след точка A са избрани точки P и Q, за които $AP = PQ$. Да се докаже, че точките P, O, C и S лежат на една окръжност, тогава и само тогава, когато точките Q, B, C и S лежат на една окръжност.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа m и n, за които

$$n = m^{\varphi(n)} - 1.$$

(За всяко естествено число n с $\varphi(n)$ се означава броя на естествените числа, по-малки или равни на n, които са взаимно прости с n.)

Задача 4. Нека M е множество от естествени числа, всяко от които има 2013 цифри и не съдържа 0 в десетичния си запис. Две числа от M ще наричаме *съседни*, ако цифрите им съвпадат в поне един разряд. Да се определи максималният брой елементи на M, ако измежду всеки 9 числа от M можем да изберем 3, всеки две от които са съседни.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа: 4 часа и 30 минути