Министерство на образованието, младежта и науката
Съюз на математиците в България

---

62 Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 25 февруари 2013 г.

Тема за 12. клас

Задача 1. Да се реши в цели числа уравнението

$$x^3 = (x - y)(3xy + 1).$$

Задача 2. Нека I е центърът на вписаната в $\triangle\ ABC$ окръжност и A_1, B_1, C_1 са центровете на оръжностите, описани около $\triangle\ BIC, \triangle\ CIA$ и $\triangle\ AIB$. Да се докаже, че:

а) правите AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка;

б)$\dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \dfrac{R}{2r}$, където r и R са радиусите на вписаната и описаната окръжност на $\triangle\ ABC$.

Задача 3. Числата $\dfrac{1}{5}$ и $\dfrac{1}{5}$ се заменят със сумата и произведението им. За новите числа $\dfrac{2}{5}$ и $\dfrac{1}{25}$ се прилага същата операция и т.н. Да се докаже, че във всеки момент числата са по-малки от $\dfrac{1}{2}$.

Задача 4. Нека P е полином от 2013 степен с реални коефициенти така, че за произволни числа $x, y, z \in \mathbb{R}$, за които $P(x) + P(y) + P(z) = 0$, следва, че $P(x^3) + P(y^3) + P(z^3) = 3P(x)P(y)P(z)$. Да се докаже, че:

а) $P(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$;

б) P е нечетна функция.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа: 4 часа и 30 минути