

60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 12-13.03.2011 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

**Задача 9.1.** Да се реши уравнението  $\sqrt{x - \sqrt{a}} = a - x$  в зависимост от стойностите на реалния параметър  $a$ .

**Решение.** Преди всичко трябва  $a \geq 0$ , като при  $a = 0$  единственото решение е  $x = 0$ . Нека  $a > 0$ . Уравнението има смисъл при  $x \geq \sqrt{a}$ , като при  $x > a$  то няма решение. Нека  $\sqrt{a} \leq x \leq a$ . Оттук следва и  $a \geq \sqrt{a}$ , т.е.  $a \geq 1$  и при  $0 < a < 1$  уравнението няма решение.

При  $a \geq 1$  уравнението е равносилно с  $x - \sqrt{a} = (a - x)^2$  или  $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + \sqrt{a} = 0$ . Корените на това квадратно уравнение са  $x_1 = a + \sqrt{a}$  и  $x_2 = a - \sqrt{a} + 1$ . Тъй като  $a + \sqrt{a} > a$ , то  $x_1$  не е решение. Понеже  $a - \sqrt{a} + 1 \geq \sqrt{a}$  (това е равносилно с  $(\sqrt{a} - 1)^2 \geq 0$ ) и  $a - \sqrt{a} + 1 \leq a$  (това следва от  $a \geq 1$ ), то  $x_2$  е решение.

Окончателно, при  $a < 0$  и  $0 < a < 1$  уравнението няма решение, при  $a = 0$  има решение  $x = 0$  и при  $a \geq 1$  решението е  $x = a - \sqrt{a} + 1$ .

**Инструкции за оценяване.** 1 т. за случая  $a = 0$ ; 1 т. за достигане до  $x \in [\sqrt{a}, a]$  и  $a \geq 1$ ; 2 т. за намиране на  $x_1$  и  $x_2$ , 1 т. за отхвърляне на  $x_1$ ; 1 т. за обосноваване, че  $x_2$  е решение; 1 т. за окончателния отговор.

**Задача 9.2.** Да се намерят всички прости числа  $p$ , за които съществуват взаимно прости естествени числа  $a$  и  $b$ , такива, че

$$p(a^2 + ab + b^2) = 1501(a + b).$$

**Решение.** Ако допуснем, че има просто число  $r$ , дялящо  $a + b$  и  $a^2 + ab + b^2$ , то от  $b \equiv -a \pmod{r}$  и  $0 \equiv a^2 + ab + b^2 \equiv a^2 - a^2 + a^2 = a^2 \pmod{r}$  следва, че  $r|a$  и  $r|b$ , което противоречи на  $(a, b) = 1$ . Следователно  $(a + b, a^2 + ab + b^2) = 1$ . Тогава, тъй като  $a + b|p(a^2 + ab + b^2)$ , то  $a + b|p$ . Но  $a + b > 1$ , така че  $a + b = p$  и  $a^2 + ab + b^2 = 1501$ .

От  $1501 = (a + b)^2 - ab = p^2 - ab$  получаваме  $p^2 > 1501$  и оттук  $p \geq 39$ . Освен това  $a$  и  $b$  са корени на квадратното уравнение (1)  $x^2 - px + p^2 - 1501 = 0$  и трябва дискриминантата  $D$  на това уравнение да е неотрицателна. От  $D = 6004 - 3p^2 \geq 0$  получаваме  $p^2 \leq 2001$  и значи  $p \leq 44$ .

Понеже  $p$  е просто число, остават възможностите  $p = 41$  и  $p = 43$ . Сега пресмятаме, че при  $p = 41$  корените на (1) са 5 и 36 (взаимно прости естествени числа), а при  $p = 43$  те не са цели числа. Окончателно,  $p = 41$ .

**Инструкции за оценяване.** 3 т. за обосноваване получаване на  $a + b = p$  и  $a^2 + ab + b^2 = 1501$ , 3 т. за достигане да  $39 \leq p \leq 44$ , 1 т. за окончателния отговор.

**Задача 9.3.** Даден е изпъкнал четириъгълник  $ABCD$ , в който  $H_a$  е ортоцентър на  $\triangle BCD$ ,  $H_b$  е ортоцентър на  $\triangle CDA$ ,  $H_c$  е ортоцентър на  $\triangle DAB$  и  $H_d$  е ортоцентър на  $\triangle ABC$ . Да се докаже, че ако правите  $AC$  и  $H_aH_c$  са успоредни, но не съвпадат, то правите  $BD$  и  $H_bH_d$  са успоредни.

**Решение.** Имаме  $AH_c \perp BD$  и  $CH_a \perp BD$ , откъдето  $AH_c \parallel CH_a$  и следователно четириъгълникът  $AH_cCH_a$  е успоредник.

Да построим точката  $P$  така, че векторите  $\overrightarrow{AH_c}$ ,  $\overrightarrow{PB}$  и  $\overrightarrow{CH_a}$  са равни. Тогава  $PB \parallel AH_c \Rightarrow \sphericalangle PBD = 90^\circ$  и  $PA \parallel BH_c \Rightarrow \sphericalangle PAD = 90^\circ$ . Оттук, точката  $A$  лежи на описаната окръжност на  $\triangle PBD$ . Аналогично, точката  $C$  лежи на същата описана окръжност и четириъгълникът  $ABCD$  е вписан в окръжност.

Да построим точката  $Q$ , диаметрално противоположна на  $C$  в тази окръжност. По обратния път на горното разсъждение установяваме, че  $QAH_dB$  е успоредник,  $QA = BH_d$ , и аналогично  $QA = DH_b$ , откъдето  $BH_d = DH_b$ , фигурата  $BH_dH_bD$  също е успоредник, и  $BD \parallel H_bH_d$ , както се искаше.

**Инструкции за оценяване.** 1 т. за доказателство, че  $AH_cCH_a$  е успоредник; 4 т. за доказателство, че четириъгълникът  $ABCD$  е вписан, 2 т. за довършване.

**Задача 9.4.** Да се намерят всички стойности на реалните параметри  $a$  и  $b$ , за които полиномът  $f(x) = x^4 + x^3 - (a^2 - 1)x^2 + 2abx + a^2 - a - 6$  се дели на полинома  $g(x) = x^2 - a^2$ .

**Решение.** Лесно се вижда, че  $a = 0$  не дава решение на задачата. Тъй като корените на делителя  $g(x)$  са  $a$  и  $-a$ , при  $a \neq 0$  условието е еквивалентно на  $f(a) = f(-a) = 0$ . Оттук получаваме системата  $a^4 + a^3 - a^2(a^2 - 1) + 2a^2b + a^2 - a - 6 = 0$ ,  $a^4 - a^3 - a^2(a^2 - 1) - 2a^2b + a^2 - a - 6 = 0$ . След елиминиране на  $a^3 + 2a^2b$  достигаме до квадратното уравнение  $2a^2 - a - 6 = 0$  с корени  $a_1 = 2$  и  $a_2 = -\frac{3}{2}$ . Сега от първото уравнение от горната система намираме  $b = -\frac{a}{2}$ , откъдето  $b_1 = -1$  и  $b_2 = \frac{3}{4}$ . Следователно търсените стойности са  $(a, b) = (2, -1)$  и  $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ , като съответните разлагания са  $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = (x^2 - 4)(x^2 + x + 1)$  и  $x^4 + x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{9}{4} = (x^2 - \frac{9}{4})(x^2 + x + 1)$ .

**Инструкции за оценяване.** 1 т. за записване на системата  $f(a) = f(-a) = 0$ , 4 т. за получаване на уравнение за  $a$ , 2 т. за намиране на  $b$  при известно  $a$ .

**Задача 9.5.** Нека  $T$  е множеството от всички триъгълници  $ABC$  с радиуси  $r$  и  $r_a$  съответно на вписаната окръжност и на външнописаната окръжност срещу върха  $A$ , където  $r$  и  $r_a$  са фиксирани положителни числа. Да се докаже, че:

- всички триъгълници в  $T$  имат една и съща дължина на височината от върха  $A$ ;
- измежду всички триъгълници в  $T$  най-малко лице има този, за който  $AB = AC$ .

**Решение.** а) Нека  $I$  и  $I_a$  са съответно центровете на вписаната и външнописаната окръжност, а  $AH = h_a$  е разстоянието от  $A$  до  $BC$ ,  $H \in BC$ . Ако  $IP \perp BC$ ,  $P \in BC$ , и  $I_aQ \perp BC$ ,  $Q \in BC$ , имаме  $\frac{AI}{AI_a} = \frac{r}{r_a}$ . Аналогично, ако  $IR \perp AH$ ,  $R \in AH$ , и  $I_aS \perp AH$ ,  $S \in AH$ , то  $\frac{AI}{AI_a} = \frac{h_a - r}{h_a + r_a}$ . Оттук се вижда, че  $h_a = \frac{2rr_a}{r_a - r}$  може да бъде

определено еднозначно по  $r$  и  $r_a$ , и следователно всички триъгълници от  $T$  имат равни височини през  $A$ .

б) От а) следва, че най-малко лице ще има този от триъгълниците в  $T$ , в който дължината на страната  $BC$  е минимална. Лесно се вижда, че четириъгълникът  $BI_aCI$  е вписан в окръжност  $k$  с диаметър  $II_a$ , като  $II_a \geq r + r_a$  и равенство се достига, когато вписаната и външнописаната окръжност се допират. В същия случай мярката на  $\sphericalangle BAC$  е максимална, а  $BC$  е хорда в  $k$  срещу ъгъл  $90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle BAC$ .

Получихме, че лицето на  $\triangle ABC$  е минимално точно тогава, когато вписаната и външнописаната окръжност се допират. Последното е възможно само тогава, когато  $AB = AC$ .

**Инструкции за оценяване.** 2 т. за а); 2 т. за въвеждане на вписания четириъгълник  $BI_aCI$  с цел оценяване на дължината на  $BC$ ; 3 т. за довършване.

**Задача 9.6.** Една редица от естествени числа  $x_1, x_2, \dots, x_k$  се нарича  $n$ -добра, ако  $x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq n$  и  $x_i - i$  се дели на 3 за всяко  $i = 1, \dots, k$ . Нека  $a_n$  е броят на  $n$ -добрите редици за фиксирано естествено число  $n$ . Да се докаже, че числото  $a_{n+8} - a_n$  се дели на 3.

**Решение.** Ако  $1, x_2, x_3, \dots, x_k$  е  $n$ -добра редица, то  $x_2 - 1, x_3 - 1, \dots, x_k - 1$  е  $(n-1)$ -добра редица. Вземайки пред вид и редицата с единствен член  $x_1 = 1$  получаваме, че броят на  $n$ -добрите редици, които започват с 1, е  $a_{n-1} + 1$ . Ако  $x_1, x_2, \dots, x_k$  е  $n$ -добра редица с  $x_1 \geq 4$ , то  $x_1 - 3, x_2 - 3, \dots, x_k - 3$  е  $(n-3)$ -добра редица. Оттук следва, че броят на  $n$ -добрите редици, незапочващи с 1, е  $a_{n-3}$ .

Горните разсъждения показват, че  $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + 1$ . Пресмятаме първите няколко стойности на  $a_n$ :

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$a_n$	1	2	3	5	8	12	18	27	40	59	87
$a_n \pmod{3}$	1	2	0	2	2	0	0	0	1	2	0

Сега твърдението лесно следва по индукция. Базата за индукцията следва от таблицата. Нека  $n \geq 4$  и  $a_{k+8} \equiv a_k \pmod{3}$  за всяко  $k \leq n$ . Тогава

$$a_{n+9} = a_{n+8} + a_{n+6} + 1 \equiv a_n + a_{n-2} + 1 = a_{n+1} \pmod{3},$$

което завършва доказателството.

**Инструкции за оценяване.** 4 т. за намиране на рекурентна връзка за  $a_n$ ; 1 т. за пресмятане на първите членове на редицата; 2 т. за довършване на доказателството по индукция.

**Задача 10.1** Да се намерят всички стойности на реалните параметри  $a$  и  $b$ , за които неравенството  $2|x^2 + ax + b| > 1$  няма решения в интервала  $[1, 3]$ .

**Решение.** Да означим  $f(x) = x^2 + ax + b$ . Първо ще докажем, че абсцисата на върха на параболата  $f(x)$  е в интервала  $[1, 3]$ .

Ако  $-\frac{a}{2} < 1 \iff a > -2$ , условието е еквивалентно на  $2f(1) \geq -1$  и  $2f(3) \leq 1$ , откъдето получаваме  $2 + 2a + 2b \geq -1$  и  $18 + 6a + 2b \leq 1$ . Следователно  $-2a - 3 \leq 2b \leq -6a - 17$ , откъдето  $-2a - 3 \leq -6a - 17 \iff a \leq -\frac{7}{2}$ , което противоречи на  $a > -2$ . Аналогично се вижда, че неравенството  $-\frac{a}{2} > 3$  е невъзможно – дава  $a < -6$  и  $a \geq -\frac{9}{2}$ .

При  $-\frac{a}{2} \in [1, 3]$  условието е еквивалентно на  $2f(1) \leq 1$ ,  $2f(3) \leq 1$  и  $2f(-\frac{a}{2}) \geq -1$ , съответно  $1 + a + b \leq \frac{1}{2}$ ,  $9 + 3a + b \leq \frac{1}{2}$  и  $b - \frac{a^2}{4} \geq -\frac{1}{2}$ . От първото и третото получаваме  $\frac{a^2}{4} - \frac{1}{2} \leq b \leq -a - \frac{1}{2}$  и следователно  $a^2 + 4a \leq 0 \iff a \in [-4, 0]$ . Аналогично от второто и третото неравенства имаме  $\frac{a^2}{4} - \frac{1}{2} \leq b \leq -3a - \frac{17}{2}$  или  $a^2 + 12a + 32 \leq 0 \iff a \in [-8, -4]$ . Следователно  $a = -4$  е единствената възможност, а тогава за  $b$  получаваме (от кое да е от двете двойни неравенства по-горе)  $b = \frac{7}{2}$ .

Окончателно,  $a = -4$  и  $b = \frac{7}{2}$ .

**Инструкции за оценяване:** 2 т. за отхвърляне на възможността  $-\frac{a}{2} \notin [1, 3]$ , 5 т. за случая  $-\frac{a}{2} \in [1, 3]$ , като от тях 2 т. за получаване на  $a^2 + 4a \leq 0$ , 2 т. за получаване на  $a^2 + 12a + 32 \leq 0$  и 1 т. за намиране на  $b$ .

**Задача 10.2.** Виж задача 9.2.

**Решение.**

**Инструкции за оценяване:**

**Задача 10.3.** Виж задача 9.3.

**Задача 10.4.** Да се реши неравенството

$$\sqrt{1 - 3x - \sqrt{12 - 8x}} > \sqrt{-x^2 - 3x + 4}.$$

**Решение.** Допустимите стойности за  $x$  са всички решения на системата

$$\begin{aligned} -x^2 - 3x + 4 &\geq 0 \\ 12 - 8x &\geq 0 \\ 1 - 3x - \sqrt{12 - 8x} &\geq 0. \end{aligned}$$

Оттук получаваме  $x \in [-4, -11/9]$ .

Повдигаме двете страни на квадрат и получаваме

$$x^2 - 3 > \sqrt{12 - 8x}.$$

Това неравенство не е изпълнено за  $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ . За всички останали стойности на  $x$  повдигаме още веднъж на квадрат и достигаем до

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x - 1)^2(x^2 + 2x - 3) > 0.$$

Тъй като  $(x - 1)^2 > 0$  за всяко допустимо  $x$ , горното неравенство се свежда до  $x^2 + 2x - 3 > 0$ , откъдето  $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ .

Окончателно решения на неравенството са всички  $x \in [-4, -3)$ .

**Инструкции за оценяване:** 2 т. за определяне на дефиниционната област на  $x$ ; 2 т. за достигане на неравенство от четвърта степен; 2 т. за разлагане на полинома от четвърта степен и решаване на неравенството; 1 т. за намиране на окончателните стойности на  $x$ , които са решения на задачата.

**Задача 10.5.** Виж задача 9.5.

**Задача 10.6.** Виж задача 9.6.

**Автори на задачите:**

Петър Бойваленков – 9.4, 10.1;

Иван Ланджев – 9.6(10.6), 10.4;

Николай Белухов – 9.3(10.3), 9.5(10.5);

Керопе Чакърян – 9.1, 9.2 (10.2).