



РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 25 април 2009 г.

ТЕМА ЗА 8 КЛАС

Задача 1. Графиките на функциите $f(x) = |x-2| + a$ и $g(x) = 2x + b$ се пресичат в точката A , чиято абсциса е 1. Графиките на $f(x)$ и $g(x)$ пресичат ординатната ос съответно в точките B и C . Намерете лицето на триъгълника ABC .

Задача 2. Върху окръжност са взети точките A_1, A_2, \dots, A_n ($n > 6$) в посочения ред така, че $\widehat{A_1A_2} = \widehat{A_2A_3} = \dots = \widehat{A_{n-1}A_n} = \widehat{A_nA_1}$.

а) Намерете n , ако е известно, че правите A_1A_4 и A_2A_{n-2} са перпендикулярни.

б) Върху правата A_1A_n е взета точката M така, че A_1 е между A_n и M и $A_1M = A_1A_4$. Докажете, че точките M, A_2 и A_{n-2} лежат на една права.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа n , за които числото $4^{n+1} + 3 \cdot 11^n$ е степен на просто число.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.

Пожелаваме Ви успех!

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 8 КЛАС

Задача 1. Понеже точката A лежи върху всяка от двете графики, то координатите ѝ ще имат вида $A(1; f(1))$ и $A(1; g(1))$. От $f(1) = 1 + a$ (1 т.) и $g(1) = 2 + b$ (1 т.) следва, че $a + 1 = b + 2$ или $a - b = 1$ (1 т.). От друга страна, координатите на точките B и C ще имат вида $B(0; f(0))$ и $C(0; g(0))$. Лесно се пресмята, че $B(0; 2 + a)$ (1 т.) и $C(0; b)$ (1 т.). Тогава за лицето на триъгълника ABC получаваме, че е равно на $\frac{1}{2} BC \cdot h_A = \frac{1}{2} |2 + a - b| \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$ квадратни мерни единици (2 т.).

Задача 2. а) Да отбележим, че точките A_2 и A_{n-2} са в различни полуравнини относно правата A_1A_4 и ако хордите A_1A_4 и A_2A_{n-2} се пресичат в точката L , то $\angle A_1LA_2 = \frac{1}{2} (\widehat{A_1A_2} + \widehat{A_4A_{n-2}}) = \frac{1}{2} \left(\frac{360^\circ}{n} + \frac{(n-6)360^\circ}{n} \right) = \frac{(n-5)180^\circ}{n}$ (2 т.). Оттук

$$\frac{(n-5)180^\circ}{n} = 90^\circ \Rightarrow \frac{n-5}{n} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow n = 10 \text{ (1 т.)}$$

б) Тъй като $\widehat{A_1A_4} = \widehat{A_{n-2}A_1} = \frac{3 \cdot 360^\circ}{n}$, то хордите A_1A_4 и A_1A_{n-2} са равни, а това дава, че $A_1M = A_1A_{n-2}$ (1 т.). Следователно $\triangle A_1MA_{n-2}$ е равнобедрен и $\angle MA_{n-2}A_1 = \angle A_1MA_{n-2} = \frac{1}{2} \angle A_nA_1A_{n-2}$. Но $\sphericalangle A_nA_1A_{n-2} = \frac{1}{2} \widehat{A_{n-2}A_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{n}$, откъдето $\angle MA_{n-2}A_1 = \angle A_1MA_{n-2} = \frac{180^\circ}{n}$ (1 т.). Освен това $\angle A_2A_{n-2}A_1 = \frac{1}{2} \widehat{A_1A_2} = \frac{180^\circ}{n}$ (1 т.).

Получените равенства означават, че правите MA_{n-2} и A_2A_{n-2} сключват един и същ ъгъл с правата A_1A_{n-2} , като при това точките M и A_2 лежат в една и съща полуравнина относно правата A_1A_{n-2} . Оттук следва, че точките M, A_2 и A_{n-2} лежат на една права (1 т.).

Задача 3. Ще покажем най-напред, че числото $4^{n+1} + 3 \cdot 11^n$ се дели на 7 за всяко естествено число n . Понеже $11 \equiv 4 \pmod{7}$, то $3 \cdot 11^n \equiv 3 \cdot 4^n \pmod{7}$ и следователно $4^{n+1} + 3 \cdot 11^n \equiv 4 \cdot 4^n + 3 \cdot 4^n \equiv 0 \pmod{7}$. Ето защо даденото число може да бъде степен само на числото 7 (1 т.). Това означава, че търсим всички двойки цели положителни числа (n, m) , за които е вярно равенството $4^{n+1} + 3 \cdot 11^n = 7^m$. При $n = 1$ имаме $4^{n+1} + 3 \cdot 11^n = 16 + 33 = 49 = 7^2$, тоест $n = 1$ е решение на задачата (1 т.). Нека n е четно. Тогава $11^n \equiv 1 \pmod{8}$, откъдето $4^{n+1} + 3 \cdot 11^n \equiv 3 \pmod{8}$. Но сравнението $7^m \equiv 3 \pmod{8}$ е невъзможно. Следователно n е нечетно (1 т.). Но при нечетно n имаме $4^{n+1} + 3 \cdot 11^n \equiv 3 \cdot 11^n \equiv 1 \pmod{8}$ и следователно трябва $7^m \equiv 1 \pmod{8}$. Последното е възможно точно когато m е четно (1 т.). И така, можем да запишем $n = 2k + 1, k \geq 1$ (случаят $n = 1$ вече разгледахме) и $m = 2t, t \geq 1$. Тогава равенството $4^{n+1} + 3 \cdot 11^n = 7^m$ приема вида $4^{2k+2} + 3 \cdot 11^{2k+1} = 7^{2t}$, откъдето получаваме, че $3 \cdot 11^{2k+1} = 7^{2t} - 4^{2k+2}$ или

$3 \cdot 11^{2k+1} = (7^t - 4^{k+1})(7^t + 4^{k+1})$ (**1 т.**). Числата $7^t + 4^{k+1}$ и $7^t - 4^{k+1}$ са нечетни и разликата им е степен на двойката. Следователно те са взаимно прости. При това числото $7^t - 4^{k+1}$ се дели на 3. Това означава, че равенството $3 \cdot 11^{2k+1} = (7^t - 4^{k+1})(7^t + 4^{k+1})$ е изпълнено точно тогава, когато $7^t - 4^{k+1} = 3$ и $7^t + 4^{k+1} = 11^{2k+1}$ (**1 т.**) (тук използваме, че не е възможно $7^t + 4^{k+1} = 1$). Но от равенството $7^t - 4^{k+1} = 3$ следва, че $7^t \equiv 3 \pmod{8}$, което вече отбелязахме, че е невъзможно (**1 т.**). Следователно само $n=1$ е решение на задачата.