

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА**

**ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО**

**МАТЕМАТИКА**

**23.05.2012 Г. – ВАРИАНТ 1**

*Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!*

**1. Кое от числата принадлежи на интервала  $[-1; 1]$ ?**

- А)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$                       Б)  $7^{-1.49}$                       В)  $-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$                       Г)  $625^{\frac{1}{4}}$

**2. Числената стойност на израза  $\sqrt{\sqrt{625}-\sqrt{81}}$  е равна на:**

- А) 16                      Б)  $2^4\sqrt{34}$                       В) 4                      Г)  $\sqrt{34}$

**3. Допустимите стойности на израза  $\frac{3+x}{\sqrt{3-x}} + \frac{1}{3x}$  са:**

- А)  $x \in (-\infty; 3)$                       Б)  $x \in (-\infty; 3]$                       В)  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$                       Г)  $x \in (3; \infty)$

**4. Решенията на неравенството  $\frac{x^2-4}{2x} \geq 0$  са:**

- А)  $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$                       Б)  $(-\infty; -2] \cup (0; 2]$   
В)  $[-2; 0] \cup [2; \infty)$                       Г)  $[-2; 0) \cup [2; \infty)$

**5. Равенството  $\frac{1}{4} \cdot 6^{\log_6 x} = x - 6$  е вярно за  $x$  равно на:**

- А) -8                      Б) 4,8                      В)  $7\frac{1}{2}$                       Г) 8

**6. За корените  $x_1$  и  $x_2$  на уравнението  $-0,5x^2 + 22,5x - 2 = 0$  е вярно, че:**

- А)  $x_1 > 0$  и  $x_2 < 0$                       Б)  $x_1 < 0$  и  $x_2 < 0$   
В)  $x_1 > 0$  и  $x_2 > 0$                       Г)  $x_1 = -x_2$

**7. Два от корените на уравнението  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  са  $-\frac{1}{3}$  и 2. Другите му корени са:**

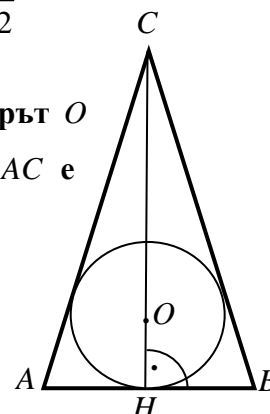
- А)  $-\frac{1}{2}$  и 3                      Б)  $-\frac{2}{3}$                       В) -2                      Г) -2 и  $\frac{1}{3}$

8. За  $\alpha = -\frac{\pi}{6}$  стойността на израза  $\sin 3\alpha - \cos 2\alpha$  е:

- А)  $-\frac{3}{2}$                       Б)  $-\frac{1}{2}$                       В)  $\frac{1}{2}$                       Г)  $\frac{3}{2}$

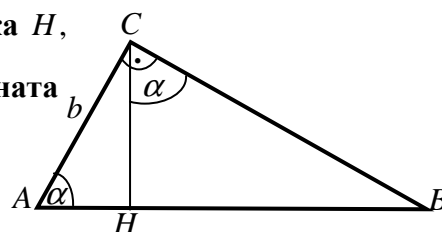
9. В равнобедрен  $\triangle ABC$  с основа  $AB = 8$  cm е вписана окръжност. Центърът  $O$  на окръжността дели височината  $CH$  в отношение  $5:2$ . Дължината на  $AC$  е равна на:

- А) 6 cm                      Б) 10 cm                      В) 16 cm                      Г) 20 cm



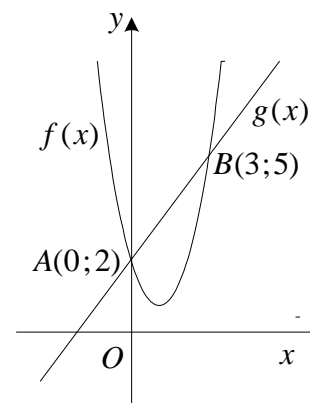
10. Върху хипотенузата  $AB$  на правоъгълния  $\triangle ABC$  е взета точка  $H$ , така че  $\angle HCB = \angle CAB = \alpha$ . Ако  $AC = b$ , то диаметърът на описаната окръжност около  $\triangle HCB$  е равен на:

- А)  $b \cdot \sin \alpha$               Б)  $b \cdot \cos \alpha$               В)  $b \cdot \operatorname{tg} \alpha$               Г)  $\frac{1}{2} b \cdot \operatorname{tg} \alpha$



11. На чертежа са построени графиките съответно на квадратната функция  $f(x)$  и на линейната функция  $g(x)$ . Тези графики се пресичат в точките  $A(0;2)$  и  $B(3;5)$ . Решенията на неравенството  $f(x) > g(x)$  са числата от интервала:

- А)  $(-\infty; 0)$                       Б)  $(0; 3)$   
 В)  $(-\infty; 0) \cup (3; \infty)$                       Г)  $(3; \infty)$



12. Коя от формулите задава общия член  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  на редицата на всички естествени числа, които при деление на 3 дават остатък 2?

- А)  $a_n = 3n + 2$                       Б)  $a_n = 3n - 1$                       В)  $a_n = 3n - 2$                       Г)  $a_n = n^2 + 1$

13. Ако за аритметична прогресия е известно, че  $a_2 + a_6 = 3$  и сборът на първите 13 члена е равен на 26, то намерете разликата на прогресията.

- А)  $\frac{1}{6}$                       Б)  $\frac{1}{3}$                       В) 1                      Г) 6

14. Клоун разполага с 2 различни панталона, 3 вида ризи, 5 различни маски за лице и 2 перуки в различен цвят. По колко различни начини той може да избере комплект от панталон, риза, маска и перука за едно представление пред публика?

- А) 12                      Б) 24                      В) 30                      Г) 60

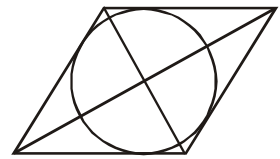
15. В таблицата са дадени измерените температури на 25.04.2012 г. в 12 часа на обяд в няколко български града. С колко градуса се различава модата от средната стойност на температурите в статистическия ред от данни?

$t^{\circ}$ (измерена температура по C)	10°	15°	20°	25°
n (брой градове с $t^{\circ}$ по C)	3	4	1	2

- А) с 1°                                      Б) с 4°                                      В) с 6°                                      Г) с 11°

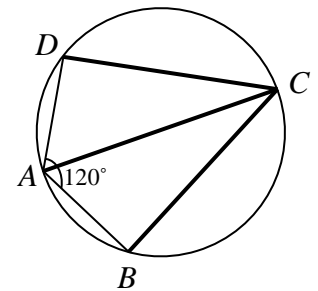
16. Страната на ромб е 12 cm и острият му ъгъл е 60°. Радиусът на вписаната в ромба окръжност е равен на:

- А) 3 cm                      Б)  $3\sqrt{3}$  cm                      В) 6 cm                      Г)  $6\sqrt{3}$  cm



17. Четириъгълникът  $ABCD$  е вписан в окръжност и  $\angle DAB = 120^{\circ}$ . Ако  $BD = 12$  cm и  $\angle ABC = \angle ADC$ , то диагоналят  $AC$  е равен на:

- А)  $8\sqrt{3}$  cm                      Б)  $8\sqrt{2}$  cm                      В)  $6\sqrt{3}$  cm                      Г)  $4\sqrt{3}$  cm



18. Даден е  $\triangle ABC$ , за който  $AC = 3$  cm,  $BC = 6$  cm и  $\angle ACB = 120^{\circ}$ . Дължината на ъглополовящата  $CL (L \in AB)$  е:

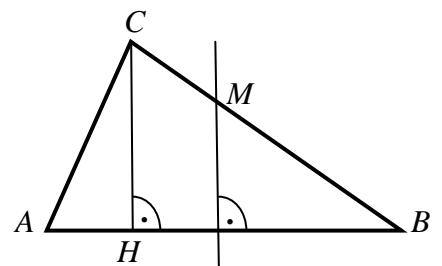
- А) 2 cm                      Б) 3 cm                      В)  $2\sqrt{3}$  cm                      Г)  $2\sqrt{7}$  cm

19. Трапецът  $ABCD (AB \parallel CD)$  със страни  $AB = 10$ ,  $BC = 7$ ,  $CD = 4$  и  $AD = 5$  е с лице, равно на:

- А)  $2\sqrt{6}$                       Б)  $6\sqrt{6}$                       В)  $14\sqrt{6}$                       Г)  $42\sqrt{6}$

20. В  $\triangle ABC$  симетралата на страната  $AB$  пресича страната  $BC$  в точка  $M$  така, че  $BM : CM = 5 : 2$ . Ако  $CH (H \in AB)$  е височина в  $\triangle ABC$ , намерете отношението  $AH : HB$ .

- А) 1:5                      Б) 3:5                      В) 3:7                      Г) 2:7



Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Намерете стойността на израза  $\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 (1 + \sin \alpha)^{-1}$ , ако  $\sin \alpha \neq -1$ .

22. Да се реши уравнението  $\sqrt{2x^2 - x - 2} = -x$ .

23. Даден е изпъкнал  $n$ -ъгълник. Броят на всички отсечки с краища измежду върховете му е 45. Да се намери броят  $n$  на върховете на многоъгълника.

24. Група младежи решили да изпратят писма по Интернет с пожелания за късмет. Първия ден всеки от тях изпратил пожелания на петима свои приятели. Втория ден всеки от получените пожеланието го препратил на други петима свои приятели и т.н., като всеки, получил пожелание предния ден, препращал пожеланието на петима свои приятели следващия ден. При тези условия в края на петия ден броят на изпратените пожелания бил 12500. Колко са младежите от групата, започнали инициативата?

25. Намерете лицето на правоъгълен триъгълник с хипотенуза 5 cm и сбор от дължините на катетите 6 cm.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. За допустимите стойности на  $x$  докажете тъждеството

$$\left(\frac{1}{\cos 2x} - \operatorname{tg} 2x\right)(\sin x + \cos x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

27. Краищата на отсечка  $AB = 3$  cm са центрове на две окръжности, като радиусът на окръжността с център  $A$  е по-малък от радиуса на окръжността с център  $B$ . Радиусите са избрани случайно от пет отсечки с дължини 1 cm, 2 cm, 4 cm, 5 cm и 9 cm. Намерете броя на възможностите двете окръжности да имат поне една обща точка и вероятността построените окръжности да имат две общи точки?

28. Четириъгълникът  $ABCD$  със страна  $BC = 7$  е вписан в окръжност с диаметър 25 и център точката  $O$ , която лежи на страната  $AB$ . Лицето на  $\triangle ACD$  е равно на 108. Да се намерят лицето и периметърът на четириъгълника.

## ФОРМУЛИ

### Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{при } D \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Формули на Виет: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

### Квадратна функция

Графиката на  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  е парабола с връх точката  $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$

### Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$
$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}, \quad a \neq 0 \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{при } a \geq 0, k \geq 2, n \geq 2 \text{ и } m, n, k \in \mathbb{N}$$
$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a a^x = x \quad \text{при } a > 0, b > 0 \text{ и } a \neq 1$$

### Комбинаторика

Брой на пермутациите на  $n$  елемента:  $P_n = n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Брой на вариациите на  $n$  елемента  $k$ -ти клас:  $V_n^k = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на  $n$  елемента  $k$ -ти клас:  $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Вероятност за настъпване на събитието  $A$ :

$$p(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

### Прогресии

Аритметична прогресия:  $a_n = a_1 + (n-1)d$   $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Геометрична прогресия:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$   $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$

Формула за сложна лихва:  $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$

### Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник:  $c^2 = a^2 + b^2$        $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$        $a^2 = a_1c$        $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$        $r = \frac{a+b-c}{2}$        $\sin \alpha = \frac{a}{c}$        $\cos \alpha = \frac{b}{c}$        $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$        $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Формула за медиана:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \quad m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Формула за ъглополовяща:  $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$        $l_c^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник:  $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

### Формули за лице

Триъгълник:  $S = \frac{1}{2}ch_c$        $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$        $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = pr \quad S = \frac{abc}{4R}$$

Успоредник:  $S = ah_a$        $S = ab \sin \alpha$       Трапец:  $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник:  $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник:  $S = pr$

### Тригонометрични функции

$\alpha^\circ$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\alpha \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА  
И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 23 май 2012 г.

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

Въпроси с избран отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1	Г	2
2	В	2
3	В	2
4	Г	2
5	Г	2
6	В	2
7	Г	2
8	А	2
9	Б	2
10	В	2
11	В	3
12	Б	3
13	А	3
14	Г	3
15	А	3
16	Б	3
17	А	3
18	А	3
19	В	3
20	В	3
21	1	4
22	$x = -1$	4
23	$n = 10$	4
24	4	4
25	$S = \frac{11}{4} \text{cm}^2 = 2\frac{3}{4} \text{cm}^2 = 2,75 \text{cm}^2$	4
26	–	10
27	Брой 5, $P = \frac{1}{5}$	10
28	$S_{ABCD} = 192$ и $P_{ABCD} = 62$	10



## Въпроси с решения

### 26. Критерии за оценяване на задача 26

#### Първи начин:

1. ( 1 точка)  $\frac{1}{\cos 2x} - \operatorname{tg} 2x = \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x}.$

2. ( 2 точки)  $\frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x}.$

3. ( 2 точки)  $\frac{(\sin x - \cos x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)}.$

4. ( 1 точки)  $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \cdot (\sin x + \cos x) = \cos x - \sin x.$

5. ( 3 точки)  $\cos x - \sin x = \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

6. ( 1 точки)  $2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

#### Втори начин:

1. ( 1 точка)  $\left(\frac{1}{\cos 2x} - \operatorname{tg} 2x\right)(\sin x + \cos x) - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$

2. ( 2 точки)  $\frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x}(\sin x + \cos x) - \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \sin x\right) = 0.$

3. ( 3 точки)  $\frac{1 - 2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}(\sin x + \cos x) - \cos x + \sin x = 0.$

4. ( 2 точки)  $\frac{1 - 2 \sin x \cos x}{\cos x - \sin x} - \cos x + \sin x = 0.$

5. ( 1 точка)  $\frac{1 - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x + \sin x \cos x + \sin x \cos x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = 0.$

6. ( 1 точки) Сведено до  $0 = 0$

## 27. Критерии за оценяване на задача 27.

1. (4 точки) Нека  $AB = 3$  cm е дадената отсечка, а  $k_A(A; r_A)$  и  $k_B(B; r_B)$  са двете окръжности с радиуси  $r_A < r_B$ . Окръжностите ще имат точно една обща точка тогава и само тогава, когато  $r_A + r_B = 3$  или  $r_B - r_A = 3$ . Благоприятните възможности за избора на радиусите са три – числата 1 и 2, или 1 и 4, или 2 и 5.
2. (3 точки) Окръжностите ще имат две общи точки тогава и само тогава, когато числата 3,  $r_A$  и  $r_B$  са дължини на страните на триъгълник. Благоприятните възможности за избора на радиусите са две – числата 2 и 4 или 4 и 5.
3. (1 точка) Броят на възможностите двете окръжности да имат поне една обща точка е равен на сбора от възможности да имат точно една обща точка с тези да имат точно 2 общи точки. Този брой е 5.
4. (1 точка) Всички възможни избори за дължини на  $r_A$  и  $r_B$  са  $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ .
5. (1 точка) Търсената вероятност е  $P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ .

## 28. Критерии за оценяване на задача 28

1. (1 точка) Определяне на  $AB$ -диаметър,  
 $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ ,  $\angle ADC > 90^\circ$ .
2. (1 точка) Намиране на  $AC = 24$ .
3. (1 точка) Намиране на  $S_{ABC} = 84$  и  $S_{ABCD} = 192$ .
4. (2 точки)  $\sin \angle ABC = \sin \angle ADC = \frac{24}{25}$ ,  $\cos \angle ADC = -\cos \angle ABC = -\frac{7}{25}$ .
5. (1 точка) Намиране на  $AD \cdot DC = 225$ .
6. (1 точка) Намиране на  $AD^2 + CD^2 = 450$ .
7. (2 точки) Намиране на  $AD = DC = 15$  или  $AD + DC = 30$ .
8. (1 точка) Намиране на  $P_{ABCD} = 62$ .

