

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

31.08.2012 Г. – ВАРИАНТ 2

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Числото $x = \log_3 \frac{1}{81}$ е от интервала:

- А) $(3; +\infty)$ Б) $(-\infty; -3)$ В) $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$ Г) $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$

2. Стойността на $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ е:

- А) $-\sqrt{6}$ Б) $\sqrt{6}$ В) 6 Г) $12 - \sqrt{6}$

3. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2 + 3x - 20 = 0$, а $b = x_1 \cdot x_2$ и $c = x_1 + x_2$, то уравнението $x^2 + bx + c = 0$ е:

- А) $x^2 - \frac{3}{2}x - 10 = 0$ Б) $x^2 + \frac{3}{2}x - 10 = 0$ В) $x^2 - 10x + \frac{3}{2} = 0$ Г) $x^2 - 10x - \frac{3}{2} = 0$

4. Множеството от решенията на неравенството $(2x - 3)^2 > 1$ е:

- А) $(1; 2)$ Б) $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}; +\infty\right)$ В) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ Г) $(-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$

5. Допустимите стойности на израза $\frac{\sqrt[4]{-x^2 y^3}}{\sqrt{xy}}$ са:

- А) $x < 0, y < 0$ Б) $x < 0, y > 0$ В) $x > 0, y < 0$ Г) $x > 0, y > 0$

6. Броят на различните корени на уравнението $x^2 + 2|x| = 0$ е:

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

7. Стойността на израза $A = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha + \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$, ако $\alpha = 30^\circ$, е:

- А) $-\sqrt{2}$ Б) $\frac{-2\sin 15^\circ}{\sqrt{3}}$ В) $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ Г) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

8. Неравенството $a^{\frac{1}{6}} < a^{\frac{1}{7}}$ е вярно, когато:

- А) $a < 0$ Б) $0 < a < 1$ В) $a = 1$ Г) $a > 1$

9. Дадена е числова редица с формула за общия член $a_n = -n^2 + 8n$, $n \in \mathbb{N}$. Най-големият от първите пет члена е с номер:

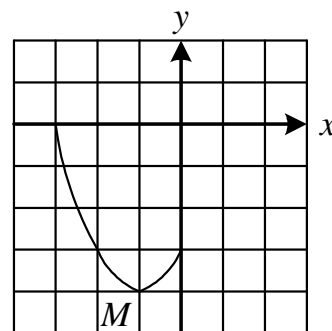
- А) 5 Б) 4 В) 3 Г) 2

10. Ако средноаритметичното на числата a, b, c, d, p и q е 3, а средноаритметичното на числата a, b, c и d е 4, то средноаритметичното на числата p и q е:

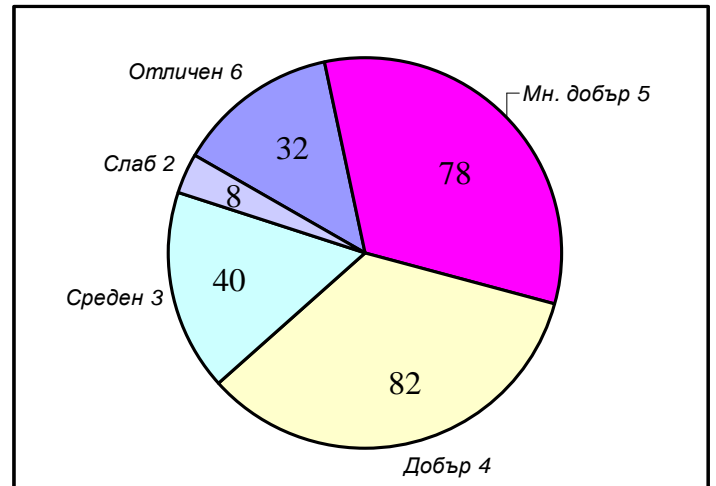
- А) 1 Б) 2 В) 2,5 Г) 3,5

11. На чертежа е показана част от графиката на квадратна функция. Ако точката $M(-1; -4)$ е върхът на параболата, то тази графика ще пресече за втори път абсцисната ос в точката с координати:

- А) (0,5;0) Б) (1;0) В) (2;0) Г) (3;0)

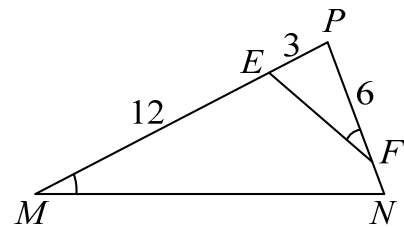


12. В края на учебната година за успеха на ученици са получени резултатите, отразени на кръговата диаграма. Определете мярката на централния ъгъл на сектора, отразяващ броя на учениците, получили оценка *Мн. добър 5*.



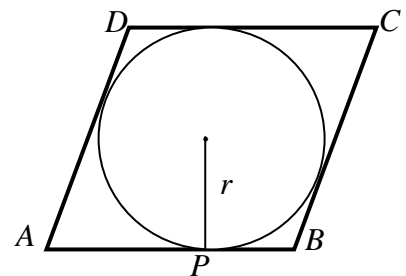
- А) 52° Б) 117°
 В) 130° Г) 156°

13. На чертежа $\angle PMN = \angle EFP$, $ME = 12$, $EP = 3$ и $PF = 6$. Отношението $EF : MN$ е равно на:



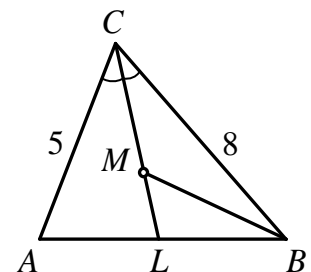
- А) 1 : 2 Б) 2 : 3 В) 1 : 4 Г) 2 : 5

14. Вписаната в ромба $ABCD$ окръжност се допира до страната AB в точка P . Ако радиусът на окръжността е $r = 12 \text{ mm}$ и $AP = 16 \text{ mm}$, то периметърът на ромба е:



- А) 5 cm Б) 6,7 cm В) 7,6 cm Г) 10 cm

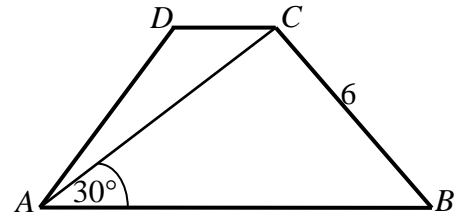
15. В $\triangle ABC$ със страни $AC = 5 \text{ cm}$ и $BC = 8 \text{ cm}$ отсечката CL ($L \in AB$) е ъглополовящата на $\angle ACB$. Ъглополовящата на $\angle ABC$ пресича CL в точка M , като я дели в отношение $CM : ML = 2 : 1$. Дължината на страната AB е равна на:



- А) 6 cm Б) 6,5 cm В) 7,5 cm Г) 8 cm

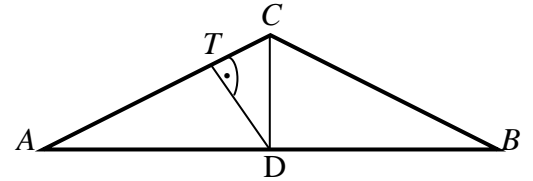
16. Трапецът $ABCD$ е равнобедрен с бедро $BC = 6$ cm и $\angle BAC = 2\angle CAD = 30^\circ$. Диагоналът на трапеца е:

- А) 6 cm Б) $6\sqrt{2}$ cm В) $6\sqrt{3}$ cm Г) 9 cm



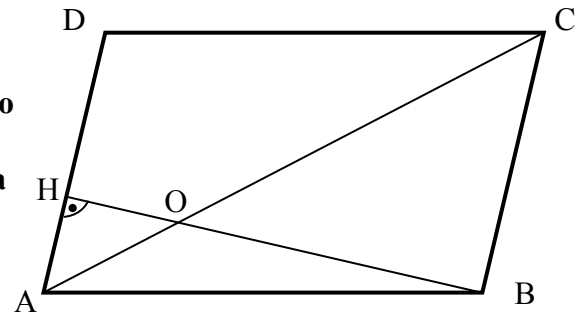
17. На чертежа е даден равнобедреният $\triangle ABC$, за който основата $AB = 16$ cm и $S_{\triangle ABC} = 48$ cm². Ако точката D е средата на AB и $DT \perp AC$ ($T \in AC$), то дължината на AT е:

- А) 3,6 cm Б) 4,8 cm В) 6,4 cm Г) 8 cm



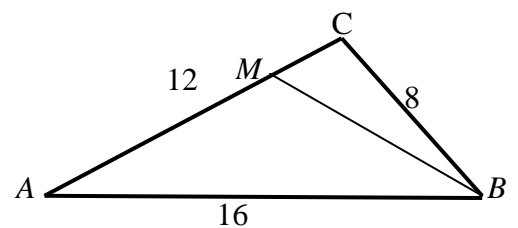
18. Даден е успоредник $ABCD$. Височината BH ($H \in AD$) пресича диагонала AC в точка O и $AO:OC = 1:4$. Ако лицето на $\triangle AOH = 3$ cm², то лицето на успоредника $ABCD$ е равно на:

- А) 60 cm² Б) 96 cm² В) 120 cm² Г) 128 cm²



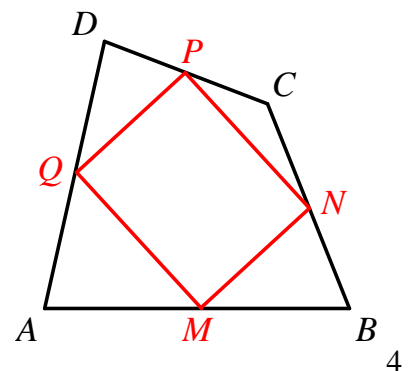
19. За $\triangle ABC$ на чертежа $AC = 12$, $AB = 16$, $BC = 8$ и точка $M \in AC$, като $MA:MC = 3:1$. Дължината на BM е:

- А) $\sqrt{337}$ Б) $\sqrt{85}$ В) $\sqrt{61}$ Г) $\sqrt{55}$



20. Точките M , N , P и Q са средите съответно на страните AB , BC , CD и DA на четириъгълника $ABCD$, а $MNPQ$ е правоъгълник с лице 12 cm². Лицето на $ABCD$ е равно на:

- А) 18 cm² Б) 24 cm² В) 36 cm² Г) 48 cm²



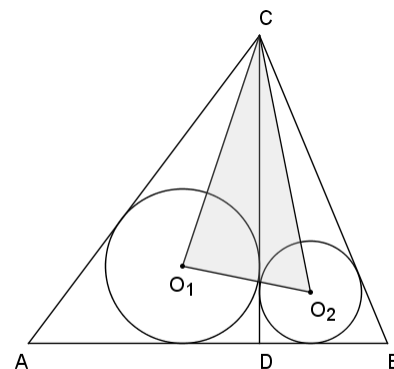
Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Пресметнете числото $\log_a \frac{9}{4}$, ако a е корен на уравнението $(a-1)(3a-2)=0$.
22. Намерете сбора от реалните корени на уравнението $\sqrt{2x^2+2}+2x^2+2=6$.
23. В правоъгълна координатна система с мерна единица 1 cm са построени графиките на функциите $f(x)=x^2+x-34$ и $g(x)=2x-4$, а M е обща точка на двете графики и лежи в първи квадрант. Намерете разстоянието в сантиметри от точка M до началото на координатната система.
24. При записване на всичките 300 различни данни от проведен експеримент се оказало, че числата в подредения статистически ред образуват аритметична прогресия, като най-малкото от тях е 2, а най-голямото е 799. Намерете медианата на тази извадка.
25. Отсечката CH ($H \in AB$) е височина в $\triangle ABC$ и $CH:AC:BC=3:4:5$. Триъгълникът е вписан в окръжност с радиус $R=\sqrt{3}$ cm. Намерете сбора от дължините на страните AC и BC .

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. За членовете на аритметична прогресия a_1, a_2, a_3, \dots и растяща геометрична прогресия b_1, b_2, b_3, \dots са в сила равенствата: $a_1=b_1, a_2=b_2+1, a_3=b_3-1$ и $b_1+b_2+b_3=21$. Намерете броя n на членовете на аритметичната прогресия, ако тяхната сума $S_n=55$.
27. С помощта на цифрите 0, 1, 2 и 3 са записани всички трицифрени числа с различни цифри и по случаен начин е избрано едно от тях. Каква е вероятността това число да се дели на 3?

28. На чертежа CD ($D \in AB$) е височина към страната AB в $\triangle ABC$. Точките O_1 и O_2 са центровете на вписаните съответно в $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ окръжности. Дължините на AD, BD и CD са съответно 9cm, 5cm и 12cm. Да се намери дължината на O_1O_2 и радиусът на описаната около триъгълника O_1O_2C окръжност.



ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{при } D \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Формули на Виет: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Квадратна функция

Графиката на $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}, \quad a \neq 0 \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[k]{a^{mk}} = \sqrt[k]{a^m} \quad \text{при } a \geq 0, k \geq 2, n \geq 2 \text{ и } m, n, k \in \mathbb{N}$$

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a a^x = x \quad \text{при } a > 0, b > 0 \text{ и } a \neq 1$$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n = n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Брой на вариациите на n елемента k -ти клас: $V_n^k = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k -ти клас: $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Вероятност за настъпване на събитието A :

$$p(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n = a_1 + (n-1)d$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Формула за медиана:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \quad m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = pr \quad S = \frac{abc}{4R}$$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab \sin \alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α°	0°	30°	45°	60°	90°
$\alpha \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА 31.08. 2012 г.

Ключ с верните отговори на ВАРИАНТ 2

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1.	Б	2
2.	А	2
3.	Г	2
4.	В	2
5.	А	2
6.	Б	2
7.	В	2
8.	Б	2
9.	Б	2
10.	А	2
11.	Б	3
12.	Б	3
13.	Г	3
14.	Г	3
15.	Б	3
16.	Б	3
17.	В	3
18.	В	3
19.	Б	3
20.	Б	3
21.	-2	4
22.	0	4
23.	10	4
24.	400,5	4
25.	$\frac{27\sqrt{3}}{10}$	4
26.	$n = 5$	10
27.	$p = \frac{5}{9}$	10
28.	$O_1O_2 = \sqrt{26}; R = \frac{13\sqrt{10}}{8}$	10

26. Критерии за оценяване

1. Изразяване членовете на двете прогресии: **1 т.**

$$\begin{array}{l} \div \div a_1, a_1 q, a_1 q^2 \quad \text{или} \quad \div a_1, a_1 + d, a_1 + 2d \\ \div a_1, a_1 q + 1, a_1 q^2 - 1 \quad \div \div a_1, a_1 + d - 1, a_1 + 2d + 1 \end{array}$$

2. Съставяне на системата **1 т.**

$$\left| \begin{array}{l} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 21 \\ 2(a_1 q + 1) = a_1 + a_1 q^2 - 1 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left| \begin{array}{l} a_1 + a_1 + d - 1 + a_1 + 2d + 1 = 21 \\ (a_1 + d - 1)^2 = a_1(a_1 + 2d + 1) \end{array} \right.$$

3. Решаване на системата **3 т.**

$$q_1 = 2 \in DC, \quad q_2 = \frac{1}{2} \in DC \quad \text{или} \quad a_1 = 12, \quad a_1 = 3$$

4. Отчитане, че геометричната прогресия е растяща **1 т.**

$$\Rightarrow q = 2 \quad \text{или} \quad \Rightarrow a_1 = 3$$

5. Намиране на членовете на двете прогресии : **2 т.**

$$a_1 = 3$$

$$\div \div 3, 6, 12$$

$$\div 3, 7, 11$$

6. Съставяне и решаване на уравнението $55 = \frac{2.3 + (n-1).4}{2} n, n \in \mathbb{N}$ **2 т.**

$$\text{Отговор: } n = 5$$

27. Критерии за оценяване:

1. Преброяване на трицифрените числа, образувани от дадените 4 цифри – **3 т.**

I начин : броят = $3.3.2 = 18$, защото цифрата на стотиците може да се избере от 3 цифри (1, 2 и 3), цифрата на десетиците – от 3 цифри (0 и останалите две от неизбраните) и цифрата на единиците – от 2 цифри (неизбраните за цифра на десетиците).

$$\text{Общият брой на числата е } 3.3.2 = 18$$

II начин.

Броят на трицифрените числа, образувани от 4 цифри, е $V_4^3 = 4.3.2 = 24$, като в това число са включени и тези, започващи с нула (012, 013, 023, ...), които са $V_3^2 = 3.2 = 6$. Следователно броят на трицифрените числа, образувани с помощта на цифрите 0, 1, 2 и 3, е $24 - 6 = 18$.

2. Преброяване на трицифрените числа, образувани от дадените цифри,

които се делят на 3 (за всяка от двете възможности по 3 точки) - **6 т.**

Трицифрените числа, образувани от тези цифри, ще се делят на 3, само ако сумата от трите цифри се дели на 3. В случая възможностите са две – цифрите са 1, 2, 0 или 1, 2, 3. **2 т.**

Броят на трицифрените числа, образувани от цифрите 1, 2 и 0, е $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, а броят на тези, чиито цифри са 1, 2 и 3, е $P_3 = 3! = 6$. **2.2 = 4 т.**

3. Намиране на търсената вероятност. **1 т.**

Общият брой благоприятни случаи са $6 + 4 = 10$

$$\text{Вероятността } P = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

28. Критерии за оценяване:

1. От правоъгълните триъгълници ACD и BCD намиране

дължините на $AC = 15 \text{ cm}$ и $BC = 13 \text{ cm}$ **(2 т.)**

2. От правоъгълните триъгълници ACD и BCD

намиране на $r_1 = 3 \text{ cm}$ и $r_2 = 2 \text{ cm}$ **(1 т.)**

3. От O_1O_2M намиране на $MO_2 = r_1 + r_2 = 5 \text{ cm}$,

$MO_1 = r_1 - r_2 = 1 \text{ cm}$ и $O_1O_2 = \sqrt{26} \text{ cm}$ **(2 т.)**

4. От синусовата теорема за O_1O_2C изразяване на $R = \frac{O_1O_2}{2 \sin \angle O_1CO_2}$. **(1 т.)**

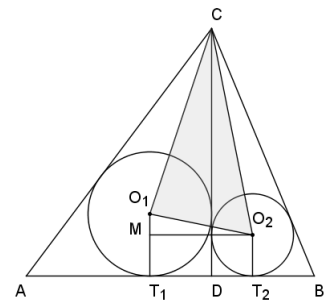
5. Изразяване на $\angle O_1CO_2 = \angle O_1CD + \angle DCO_2 = \frac{1}{2} \angle ACB$ **(1 т.)**

6. От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ намиране на $\cos \angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC}$

$$\Rightarrow \cos \angle ACB = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{169 + 225 - 196}{390} = \frac{198}{390} = \frac{33}{65} \quad \text{(1 т.)}$$

7. Намиране на $\sin \angle O_1CO_2 = \sin \left(\frac{1}{2} \angle ACB \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \angle ACB}{2}}$

$$\sin \angle O_1CO_2 = \sqrt{\frac{1 - \frac{33}{65}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{65}} = \frac{4\sqrt{65}}{65}. \quad \text{(1 т.)}$$



8. Намиране на $R = \frac{O_1O_2}{2 \sin \angle O_1CO_2} = \frac{\sqrt{26}}{\frac{8\sqrt{65}}{65}} = \frac{65\sqrt{26}}{4\sqrt{260}} = \frac{65}{4\sqrt{10}} = \frac{65\sqrt{10}}{40} = \frac{13\sqrt{10}}{8}$

cm

(1т.)